Путь при неравномерном движении

Сейчас мы будем рассматривать *неравномерное* движение — то есть движение, при котором абсолютная величина скорости меняется со временем. Оказывается, существует простая геометрическая интерпретация пути, пройденного телом при произвольном движении.

Начнём с равномерного движения. Пусть скорость тела постоянна и равна v. Возьмём два момента времени: начальный момент t_1 и конечный момент t_2. Длительность рассматриваемого промежутка времени равна $\Delta t = t_2 - t_1$.

Очевидно, что за промежуток времени $[t_1, t_2]$ тело проходит путь:

$$s = v(t_2 - t_1) = v\Delta t. \tag{1}$$

Давайте построим график зависимости скорости от времени. В данном случае это будет прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 1).

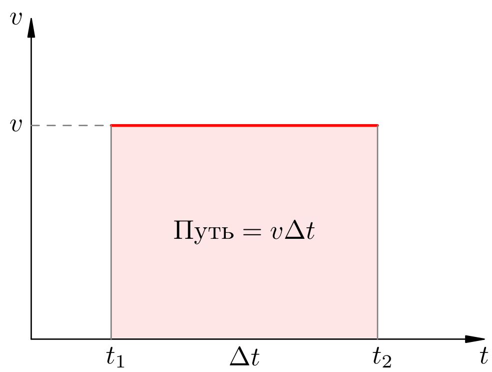

Рис. 1. Путь при равномерном движении

Нетрудно видеть, что *пройденный путь равен площади прямоугольника, расположенного под графиком скорости.* В самом деле, первый множитель v в формуле (1) есть вертикальная сторона этого прямоугольника, а второй множитель Δt — его горизонтальная сторона.

Теперь нам предстоит обобщить эту геометрическую интерпретацию на случай неравномерного движения.

Пусть скорость тела v зависит от времени, и на рассматриваемом промежутке $[t_1, t_2]$ график скорости выглядит, например, так (рис. 2):

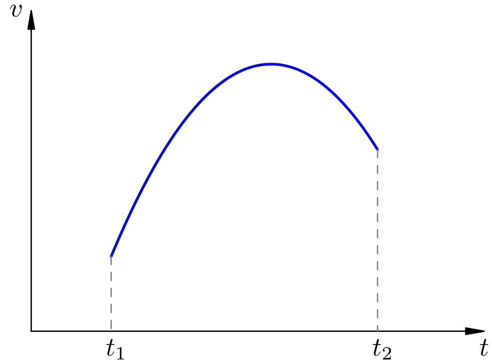

Рис. 2. Неравномерное движение

Дальше мы рассуждаем следующим образом.

1. Разобьём наш промежуток времени $[t_1, t_2]$ на небольшие отрезки величиной Δt.

2. Предположим, что на каждом таком отрезке $[t_i, t_i + \Delta t]$ тело движется с *постоянной* скоростью $v(t_i)$. То есть, плавное изменение скорости заменим ступенчатой аппроксимацией[1]: в течение каждого небольшого отрезка времени тело движется равномерно, а затем скорость тела мгновенно и скачком меняется.

   На рис. 3 показаны две ступенчатые аппроксимации. Ширина ступенек Δt на правом рисунке вдвое меньше, чем на левом.

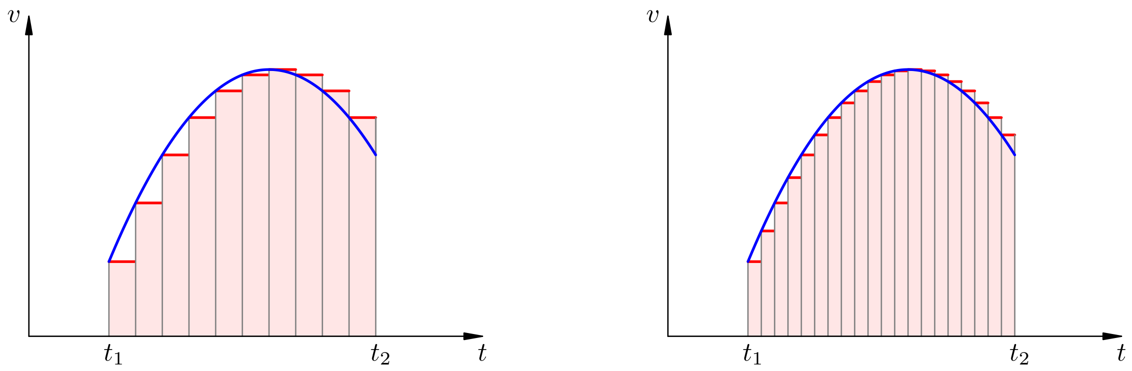

Рис. 3. Ступенчатая аппроксимация

   Путь, пройденный за время Δt равномерного движения — это площадь прямоугольника, расположенного под ступенькой. Поэтому путь, пройденный за всё время такого «ступенчатого» движения — это сумма площадей всех прямоугольников на графике.

3. Теперь устремляем Δt к нулю. Ясно, что в пределе наша ступенчатая аппроксимация перейдёт в исходный график скорости на рис. 2. Сумма площадей прямоугольников перейдёт в площадь под графиком скорости; следовательно, эта площадь и есть путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2 (рис. 4).

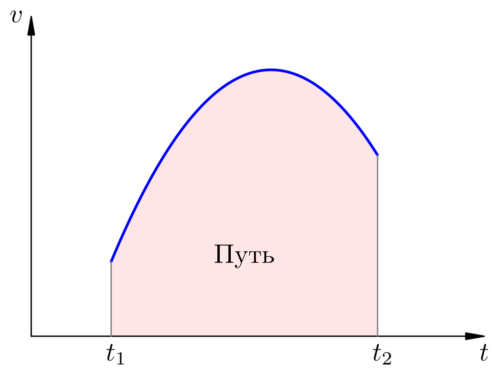

Рис. 4. Путь при неравномерном движении

В итоге мы приходим к нужному нам обобщению геометрической интерпретации пути, полученной выше для случая равномерного движения.

Геометрическая интерпретация пути. Путь, пройденный телом при любом движении, равен площади под графиком скорости на заданном промежутке времени.

[1] *Аппроксимация* — это приближённая замена достаточно сложного объекта более простой моделью, которую удобнее изучать.

Посмотрим, как работает эта геометрическая интерпретация в важном частном случае равноускоренного движения.

Задача. Тело, имеющее скорость v_0 в начальный момент $t = 0$, разгоняется с постоянным ускорением a. Найти путь, пройденный телом к моменту времени t.

Решение. Зависимость скорости от времени в данном случае имеет вид:

$$v = v_0 + at. \tag{2}$$

График скорости — прямая, изображённая на рис. 5. Искомый путь есть площадь трапеции, расположенной под графиком скорости.

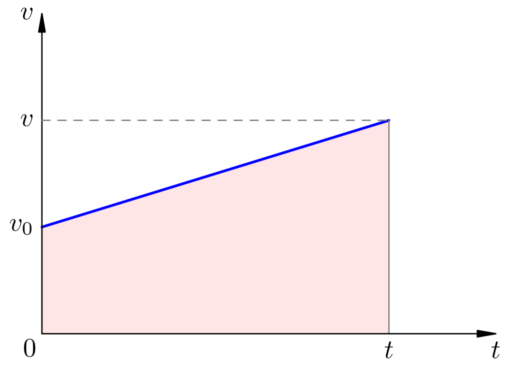

Рис. 5. Путь при равноускоренном движении

Меньшее основание трапеции равно v_0. Большее основание равно $v = v_0 + at$. Высота трапеции равна t. Поскольку площадь трапеции есть произведение полусуммы оснований на высоту, имеем:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + at}{2} \cdot t = \frac{2v_0 t + at^2}{2}\,.$$

Эту формулу можно переписать в более привычном виде:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}\,.$$

Она, разумеется, вам хорошо известна из темы «Равноускоренное движение».

Задача. График скорости тела является полуокружностью диаметра τ (рис. 6). Максимальная скорость тела равна v. Найти путь, пройденный телом за время τ.

Решение. Как вы знаете, площадь круга радиуса R равна πR^2. Но в данной задаче необходимо учесть, что радиусы полуокружности имеют разные размерности: горизонтальный радиус есть время $\tau/2$, а вертикальный радиус есть скорость v.

Поэтому пройденный путь, вычисляемый как площадь полукруга, равен половине произведения π на горизонтальный радиус и на вертикальный радиус:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\tau}{2} \cdot v = \frac{\pi v \tau}{4}\,.$$

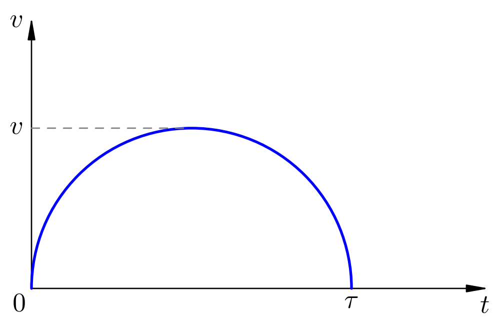

Рис. 6. К задаче