Неравенство Коши в физических задачах

Задача 1. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b выполнено неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\,.$$

В каком случае имеет место равенство?

Данное неравенство является частным случаем *неравенства Коши*:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \qquad (a_1,\ldots,a_n \geqslant 0).$$

Доказательства этого неравенства для $n=3,4$ и его использование в задачах смотрите в теории листка «Среднее арифметическое и среднее геометрическое».

В физических задачах неравенство Коши служит быстрым инструментом в следующих двух ситуациях:

1. если надо минимизировать выражение $f(x) = ax + \frac{b}{x}$;
2. если надо максимизировать произведение xy при наличии линейной связи $ax+by=c$.

Задача 2. Сумма двух чисел равна 10. Какое наибольшее значение может принимать их произведение?

Задача 3. Проволоку сопротивлением R разрезают на два куска и соединяют их параллельно. Какое наибольшее сопротивление можно при этом получить?

Задача 4. Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{9}{x}$ при $x > 0$. При каком значении x этот минимум достигается?

Задача 5. К источнику напряжения U с внутренним сопротивлением[1] r подключена нагрузка — резистор R. При какой величине R тепловая мощность на нагрузке максимальна? Чему равна эта максимальная мощность?

$\boxed{R = r;\ P_{\max} = \frac{U^2}{4r}}$

Задача 6. (*Савченко, 1.2.8*) Частица, покинув источник, пролетает с постоянной скоростью расстояние L, а затем тормозится с ускорением a. При какой скорости частицы время движения от ее вылета до остановки будет наименьшим?

$\boxed{v = \sqrt{La}}$

[1] Внутреннее сопротивление r источника можно понимать как обычный резистор r, подключённый в цепь последовательно с источником.

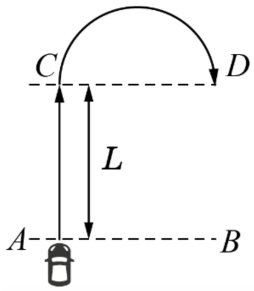
Задача 7. (*Савченко, 1.2.9*) Мигрирующие рыбы, накопив в море запас жира, заходят в устья рек. В пресной воде они не питаются, поэтому им важно добраться до нерестилищ в верховьях реки с наименьшими потерями массы. Расход жира на поддержание основного обмена веществ в организме рыбы за единицу времени равен N, а добавочный расход bv^2 тратится на движение со скоростью v. С какой скоростью должны двигаться рыбы, чтобы затраты жира на пути до нерестилища были минимальны? (Рыбы прекрасно чувствуют эту скорость.)

$\boxed{v = \sqrt{\frac{N}{b}}}$

Задача 8. (*Всеросс., 2016, РЭ, 9*) Автомобиль, едущий со скоростью v_0, в некоторый момент начинает движение с таким постоянным ускорением, что за время τ пройденный им путь s оказывается минимальным. Определите этот путь s.

$\boxed{s = \left(\sqrt{2} - 1\right) v_0 \tau}$

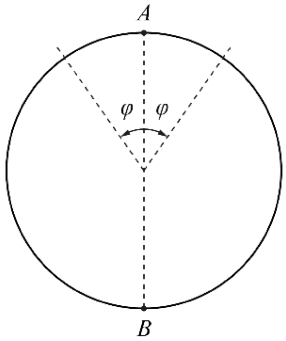
Задача 9. (*Всеросс., 2021, РЭ, 9*) Автомобиль должен проехать с постоянным ускорением прямой участок длиной L от линии старта AB до линии CD и, после её пересечения, развернувшись по дуге окружности на 180°, пересечь эту линию в обратном направлении (см. рис.). Начальная скорость автомобиля равна нулю, а на закругленном участке постоянна и равна скорости, достигнутой при разгоне по прямой. Ускорение автомобиля во время всего движения не должно превышать $a_{\max}$.



Во сколько раз время t_1 движения автомобиля от A до D при разгоне на участке AC с ускорением $a_{\max}$ превышает минимально возможное время t_2 движения от A до D по той же траектории?

$\boxed{\frac{t_1}{t_2} = \frac{1+\pi}{2\sqrt{\pi}} \approx 1{,}17}$

Задача 10. (*Всеросс., 2022, РЭ, 9*) Кольцо радиусом r сделано из проволоки, удельное сопротивление ρ которой увеличивается от точки A до точки B по линейному закону $\rho = \alpha\varphi$, где α — известная постоянная, φ — угол, отсчитываемый от точки A по (или против) часовой стрелки, как показано на рисунке.



1. Определите сопротивление R_0 всей проволоки, из которой изготовлено кольцо.

2. Найдите на кольце две точки M и N, между которыми эквивалентное сопротивление R_{MN} кольца максимально при минимальном расстоянии между M и N. Определите значение этого сопротивления $R_{\max}$ и расстояние L между M и N.

Площадь S сечения проволоки известна и постоянна вдоль всего кольца.

$\boxed{1)\ R_0 = \frac{\alpha\pi^2 r}{S};\ 2)\ R_{\max} = \frac{\alpha\pi^2 r}{4S},\ L = 2r\sin\left(\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1{,}6r}$

Задача 11. Мощность нагревателя на отрезке времени $[0;1]$ линейно растёт от нуля до 2, а на отрезке $[1;2]$ линейно убывает от 2 до нуля. Найдите наибольшее значение средней мощности.

Указание: находим среднюю мощность, деля площадь под графиком на время, и затем максимизируем с помощью неравенства Коши.

$N_{\max} = 4 - 2\sqrt{2}$; достигается в момент времени $t = \sqrt{2}$

Задача 12. (*Всеросс., 2005, ЗЭ, 9*) Поезд метро проходит расстояние S между станциями, разгоняясь с ускорением a до середины перегона и тормозя с таким же по модулю ускорением на второй половине пути. В какой момент времени τ от начала движения средняя скорость $\bar{u}$ поезда на пройденном участке пути максимальна? Найдите это максимальное значение $\bar{u}_{\max}$ и расстояние l от начала пути, на котором оно достигается.

$\tau = \sqrt{\frac{2S}{a}}$; $\bar{u}_{\max} = \sqrt{aS}\left(2 - \sqrt{2}\right)$; $l = 2S\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Задача 13. (*«Максвелл», 2018, ЗЭ, 8*) Восьмикласснику Васе поручили перетащить копну сена массой $M = 600$ кг из овина в сарай, расстояние между которыми $L = 100$ м. Известно, что скорость v мальчика обратно пропорциональна квадрату его массы m вместе с грузом и может быть выражена формулой $v = \beta/m^2$, где β — постоянный коэффициент. Масса Васи равна $m_0 = 50$ кг.

1) Найдите значение коэффициента пропорциональности β, если расстояние от сарая до овина мальчик (без сена) преодолевает за время $t_0 = 40$ с.

2) Определите, какое минимальное время понадобится Васе, чтобы равными порциями перенести всё сено. Для этого случая найдите массу одной порции сена.

$\beta = \frac{Lm_0^2}{t_0} = 6250\ \frac{\text{м}\cdot\text{кг}^2}{\text{с}}$; $t_{\min} = 2320$ с

Задача 14. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 4x + \frac{6}{x}$ при $x > 0$ (без производной, с помощью неравенства Коши). Постройте график этой функции.