# Момент импульса

Причиной ускоренного движения материальной точки является сила. Приложенная к точке сила $F$ меняет импульс точки в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = F. \tag{1}$$

Сила, таким образом, является скоростью изменения импульса материальной точки.

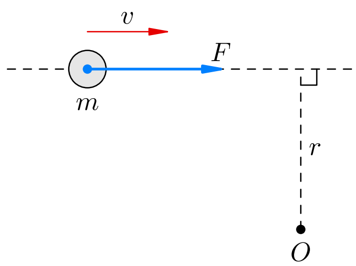
Причиной ускоренного вращения твердого тела является момент силы. Вращательное движение твердого тела описывается *уравнением моментов*, которое аналогично по виду уравнению (1):

$$\frac{dL}{dt} = \mathscr{M}. \tag{2}$$

Здесь $\mathscr{M}$ — суммарный момент внешних сил, приложенных к телу, а $L$ — *момент импульса* тела; момент сил является скоростью изменения момента импульса тела.

В данном листке мы оставим в стороне строгость изложения и попробуем на самом элементарном уровне разобраться с моментом импульса и уравнением моментов, чтобы побыстрее начать применять эти вещи к решению олимпиадных задач. Ну а желающие посмотреть, как же на самом деле строится последовательная строгая теория (в которой момент силы и момент импульса являются векторными произведениями радиус-вектора на вектор силы и вектор импульса соответственно), могут заглянуть в листок «Векторы и механика», а в идеале — проработать данный материал в первом томе Сивухина.

Итак, момент силы есть произведение силы на плечо. Аналогично, момент импульса есть произведение импульса на плечо. Рассмотрим самую простую ситуацию, которая будет пока достаточна для наших целей: материальная точка массой $m$ движется под действием силы $F$ и имеет в данный момент сонаправленную с силой скорость $v$:




Возьмем некоторую ось $O$, и пусть сила $F$ имеет плечо $r$ относительно этой оси. Умножим уравнение (1) на $r$:

$$\frac{d(pr)}{dt} = Fr.$$

Справа оказался момент силы $\mathscr{M} = Fr$, а слева — производная величины $pr = mvr$. Эта величина и называется моментом импульса материальной точки относительно оси $O$:

$$L = pr = mvr.$$

Как видим, момент силы, приложенной к точке, есть скорость изменения момента импульса точки; это и есть уравнение моментов (2) в нашем простейшем случае.

Задача 1. Момент импульса системы материальных точек — это сумма моментов импульса отдельных точек системы. Начинаем работать с гантелькой.

На концах невесомого стержня закреплены грузы массами $m_1$ и $m_2$. Точка $O$ стержня расположена на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от грузов $m_1$ и $m_2$ соответственно. Гантелька вращается вокруг точки $O$ с угловой скоростью $\omega$.

Покажите, что момент импульса гантельки относительно точки $O$ пропорционален угловой скорости: $L = I\omega$. Коэффициент пропорциональности $I$ называется *моментом инерции* гантельки относительно точки $O$. Чему он равен?

$\boxed{I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$

Задача 2. Раз уж мы заговорили о моменте инерции, давайте разберемся с кинетической энергией вращения. Продолжаем предыдущую задачу. Покажите, что кинетическая энергия вращающейся гантельки равна $I\omega^2/2$, где $I$ — ее момент инерции относительно оси вращения.

*Вспоминаете двухатомный идеальный газ? А именно, что его внутренняя энергия $\frac{5}{2}\nu RT$ складывается из кинетической энергии поступательного движения молекул, равной $\frac{3}{2}\nu RT$, и кинетической энергии их вращательного движения. Ну так вот она, кинетическая энергия вращения!*

Задача 3. Продолжаем работать с нашей гантелькой. Пусть центр масс гантельки движется со скоростью $v_c$ и при этом гантелька вращается вокруг центра масс с угловой скоростью $\omega$. Докажите *теорему Кёнига*: *кинетическая энергия гантельки равна сумме кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращения относительно центра масс*:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где $m = m_1 + m_2$ — масса гантельки, $I$ — ее момент инерции относительно центра масс.

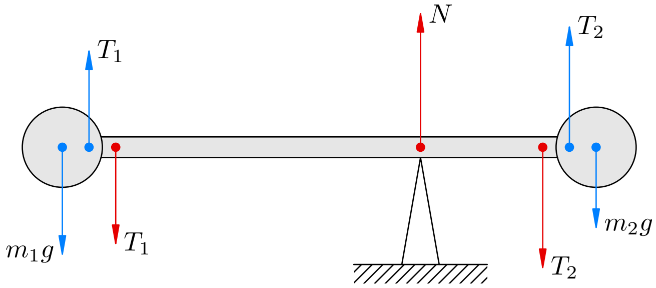
*Указание.* Пусть $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — относительные скорости грузов $m_1$ и $m_2$ в СЦМ. Тогда их абсолютные скорости равны $\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \vec{u}_1$ и $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{u}_2$. Имеем:

$$K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 (\vec{v}_c + \vec{u}_1)^2}{2} + \frac{m_2 (\vec{v}_c + \vec{u}_2)^2}{2} = \ldots \text{ (дальше сами)}$$

Задача 4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Гантель, состоящая из двух маленьких шариков массы $m$ и лёгкого жёсткого стержня длины $L$, движется в плоскости таким образом, что скорость её центра масс равна $v$, а угловая скорость $\omega$. Чему равна её кинетическая энергия?

$\boxed{K = m\left(v^2 + \frac{\omega^2 L^2}{4}\right)}$

Задача 5. Теперь покажем, что уравнение моментов (2) работает для гантельки. Предположим, что наша гантелька может вращаться вокруг горизонтальной оси; расстояния от грузов $m_1$ и $m_2$ до этой оси равны $r_1$ и $r_2$. Гантельку вначале удерживают в горизонтальном положении, а затем отпускают.




1. Запишите второй закон Ньютона для каждого груза.

2. Воспользуйтесь тем, что суммарный момент красных сил, приложенных к стержню, равен нулю (поскольку стержень невесом). Это справедливо даже для ускоренного вращения стержня: ведь если бы моменты красных сил не были скомпенсированы, невесомый стержень приобрел бы бесконечное угловое ускорение[1].

3. Исключите силы $T_1$, $T_2$ (это внутренние силы гантельки) и получите уравнение моментов в виде $I\dot{\omega} = \mathscr{M}$, где $I$ — момент инерции гантельки относительно оси вращения, $\mathscr{M}$ — суммарный момент (внешних) сил тяжести относительно этой оси.

Если в уравнении (1) положить $F = 0$, то получим $dp/dt = 0$ или $p = \text{const}$. Это — хорошо известный вам закон сохранения импульса.

Аналогично, если внешние силы отсутствуют или их моменты скомпенсированы ($\mathscr{M} = 0$), то $dL/dt = 0$ и $L = \text{const}$ — момент импульса тела остается неизменным. Это — *закон сохранения момента импульса.*

Дальнейшие задачи полезно пробовать решать двумя способами.

1. «Наивный» способ — без использования момента импульса, только второй закон Ньютона и уравновешенность моментов сил, приложеннных к невесомому стержню.

2. «Продвинутый» способ — с использованием уравнения моментов или закона сохранения момента импульса. Такой способ позволяет избежать анализа внутренних сил (а именно, реакции стержней).

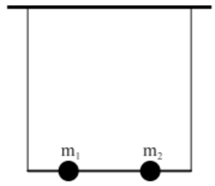
Задача 6. На концах невесомого стержня закреплены одинаковые грузы массой $m$. Стержень может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, которая делит его в отношении $1:2$. Сначала стержень удерживают в горизонтальном положении, а затем отпускают. Найдите ускорения грузов и силу давления стержня на ось в начальный момент движения.

$\boxed{a_1 = \frac{g}{5},\ a_2 = \frac{2g}{5};\ N = \frac{9}{5}mg}$

---

[1] И вот тут возникает замкнутый круг. Равенство нулю суммарного момента красных сил следует из уравнения моментов $I\dot{\omega} = \mathscr{M}$ и из того, что момент инерции невесомого стержня равен нулю. Однако мы еще не вывели уравнение моментов! Мы собираемся его выводить, опираясь на факт, который из уравнения моментов следует. Но что поделать, такова плата за элементарность изложения. За строгостью и непротиворечивостью нужно идти в источники, которые упоминались выше.

Задача 7. (*«Физтех», 2014, 9–11*) Лёгкий стержень длины $l$ подвешен за концы к потолку на двух вертикальных нитях. На стержне на расстояниях $l/4$ от его концов закреплены два небольших груза массами $m_1 = 7m$ и $m_2 = m$ (см. рис.). Правая нить внезапно обрывается. Найдите натяжение левой нити сразу после этого.



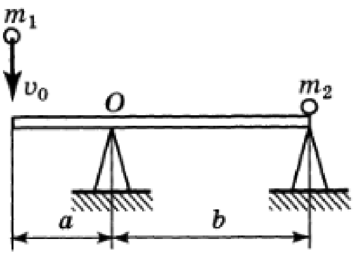

$\boxed{T = \frac{7}{4}mg}$

Перейдем к соударениям. Здесь наряду с законами сохранения импульса и энергии начинает работать закон сохранения момента импульса.

Задача 8. На концах невесомого стержня длины $\ell$ закреплены одинаковые маленькие шарики массой $m$. Третий такой же шарик летит перпендикулярно стержню со скоростью $v_0$ и упруго сталкивается с ним в точке, которая делит стержень в отношении 1 : 2. Найдите скорость шарика после удара, скорость центра масс гантельки и угловую скорость ее вращения.

$\boxed{v = \frac{2}{7}v_0,\ v_c = \frac{9}{14}v_0,\ \omega = \frac{3v_0}{7\ell}}$

Задача 9. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 10*) Невесомая абсолютно упругая доска лежит на двух опорах (рис.). В некоторый момент в левый край доски ударяется упругий шарик, масса которого равна $m_1$. Одновременно с ударом из-под правого края доски, на котором находится второй упругий шарик, быстро убирают опору. На какую высоту, отсчитывая от начального положения, подпрыгнет второй шарик после удара? Масса этого шарика равна $m_2$. В каком направлении полетит первый шарик, если перед ударом он падал на доску вертикально и имел скорость $v_0$? Силой тяжести, действующей на шарики в течение удара, можно пренебречь.

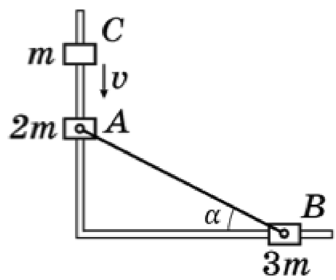



$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{2\beta}{1+\alpha\beta^2}\right)^2;\ v_1 = v_0\frac{1-\alpha\beta^2}{1+\alpha\beta^2}\ \text{(ось вниз); обозначено}\ \alpha = \frac{m_2}{m_1},\ \beta = \frac{b}{a}}$

Задача 10. (*Продолжаем предыдущую задачу*) При каком соотношении между $a$ и $b$ второй шарик подпрыгнет выше всего?

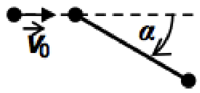
$\boxed{\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}$

Задача 11. (*Всеросс., 2018, РЭ, 11*) Три муфты ($A$, $B$ и $C$), массы которых равны $2m$, $3m$ и $m$ соответственно, могут скользить без трения по двум горизонтальным направляющим, пересекающимся под прямым углом. Муфты $A$ и $B$ с помощью шарниров соединены с лёгким жёстким неупругим стержнем так, что угол между стержнем и направляющей, на которой надета муфта $B$, равен $\alpha$. Между муфтой $C$, движущейся со скоростью $v$, и покоящейся муфтой $A$ происходит неупругое столкновение. Определите скорости муфт сразу после соударения.



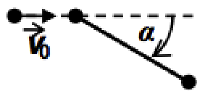

$\boxed{v_{AC} = \frac{1}{3}v\cos^2\alpha,\ v_B = \frac{1}{6}v\sin 2\alpha}$

Задача 12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Гантель, состоящая из двух массивных маленьких шариков и лёгкого жёсткого стержня длины $L$, покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. В один из её шариков врезается третий (такой же), скорость $\vec{v}_0$ которого направлена под углом 30° к стержню. Происходит лобовое абсолютно упругое соударение. Найти угловую скорость вращения гантели после удара.



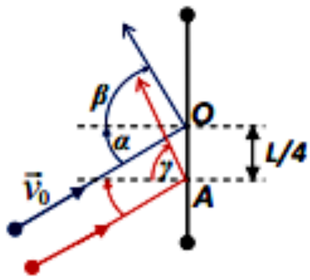

$\boxed{\omega = \frac{8v_0}{13L}}$

Задача 13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Гантель, состоящая из двух массивных маленьких шариков и лёгкого жёсткого стержня длины $L$, покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. В один из её шариков врезается третий (такой же), скорость которого $\vec{v}_0$ направлена под углом 30° к стержню. Происходит лобовое абсолютно неупругое соударение. Найти угловую скорость вращения «утяжелённой гантели» после удара.




$\boxed{\omega = \frac{v_0}{4L}}$

Задача 14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10*) Гантель из двух одинаковых массивных маленьких шайб, соединённых легким прямым гладким жёстким стержнем, покоилась на гладкой горизонтальной поверхности. Еще одна маленькая однородная цилиндрическая шайба скользила по этой поверхности со скоростью $v_0$ и нанесла упругий удар по стержню гантели в его середине — точке $O$. Угол падения (между $\vec{v}_0$ и нормалью к стержню в точке удара) был равен $\alpha = 30°$, а угол отражения (см. рис.) $\beta = 60°$. После этого гантель вернули на место, и ту же шайбу запустили ещё раз — с той же скоростью $\vec{v}_0$, но так, что теперь удар пришёлся в точку $A$, находящуюся на расстоянии $x = L/4$ от центра стержня. Найдите величину угла отражения шайбы $\gamma$ при этом ударе.




$\boxed{\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{3+(x/L)^2}{1-(x/L)^2}\operatorname{tg}\alpha\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{13}{3\sqrt{3}}\right) \approx 68°}$