Механика

Данное пособие посвящено первому разделу «Механика» кодификатора ЕГЭ по физике. Оно охватывает следующие темы.

- *Механическое движение и его виды. Относительность механического движения. Скорость. Ускорение.*
- *Равномерное движение. Прямолинейное равноускоренное движение. Свободное падение. Ускорение свободного падения. Движение по окружности с постоянной по модулю скоростью. Центростремительное ускорение.*
- *Инерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона. Принцип относительности Галилея.*
- *Масса тела. Плотность вещества. Сила. Принцип суперпозиции сил. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона.*
- *Закон всемирного тяготения. Искусственные спутники Земли. Сила тяжести. Вес и невесомость. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Давление.*
- *Момент силы. Условия равновесия твёрдого тела.*
- *Давление жидкости. Закон Паскаля. Закон Архимеда. Условия плавания тел.*
- *Импульс тела. Импульс системы тел. Закон сохранения импульса.*
- *Работа силы. Мощность. Работа как мера изменения энергии. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.*
- *Гармонические колебания. Амплитуда и фаза колебаний. Период колебаний. Частота колебаний. Свободные колебания (математический и пружинный маятники). Вынужденные колебания. Резонанс.*
- *Длина волны. Звук.*

Пособие содержит также некоторый дополнительный материал, не входящий в кодификатор ЕГЭ (но входящий в школьную программу!). Этот материал позволяет лучше понять рассматриваемые темы.

Значительно больше внимания (чем это принято в школьных учебниках) уделено использованию производной. Автор не считает нужным «скрывать» от школьников, что производная является естественным инструментом физики. Наоборот, чем скорее и лучше школьник освоится с этим аппаратом, тем проще будет ему впоследствии перейти к вузовским курсам общей физики и теоретической механики.

Поэтому первый раздел данного пособия посвящён дифференцированию. Изложение математических вопросов ведётся на физическом уровне строгости: опуская значительную долю формализма, мы стараемся вывести на первый план основные идеи, связанные с понятием производной. В частности, мы рассказываем о дифференцировании векторов (чего в школе обычно не делают). В вузе, как показывает опыт, никто уже не будет заниматься «разжёвыванием» этого материала.

Содержание

1 Производная **5**
1.1 Предел . . . 5
1.2 Мгновенная скорость . . . 7
1.3 Определение производной . . . 9
1.4 Табличные производные . . . 10
1.5 Правила дифференцирования . . . 11
1.6 Обозначения производной в физике . . . 13
1.7 Предел векторной величины . . . 14
1.8 Дифференцирование векторов . . . 15

2 Механическое движение **18**
2.1 Относительность движения . . . 18
2.2 Основная задача механики . . . 18
2.3 Материальная точка . . . 19
2.4 Траектория, путь, перемещение . . . 19
2.5 Скорость . . . 20
2.6 Ускорение . . . 21
2.7 Примеры вычисления скорости и ускорения . . . 21
2.8 Закон сложения скоростей . . . 22
2.9 Виды механического движения . . . 24

3 Равномерное прямолинейное движение **26**
3.1 Закон движения . . . 26
3.2 Интегрирование . . . 27

4 Равноускоренное движение **28**
4.1 Зависимость скорости от времени . . . 28
4.2 Закон движения . . . 28
4.3 Прямолинейное равноускоренное движение . . . 29
4.4 Свободное падение . . . 30
4.5 Горизонтальный бросок . . . 31
4.6 Бросок под углом к горизонту . . . 32

5 Равномерное движение по окружности **33**
5.1 Угловая скорость . . . 33
5.2 Закон движения . . . 34
5.3 Центростремительное ускорение . . . 34

6 Путь при неравномерном движении **35**

7 Первый закон Ньютона **38**
7.1 Инерциальные системы отсчёта . . . 38
7.2 Принцип относительности . . . 39

8 Масса и плотность **40**

9 Второй и третий законы Ньютона **41**
9.1 Принцип суперпозиции . . . 41
9.2 Второй закон Ньютона . . . 41
9.3 Третий закон Ньютона . . . 41
9.4 Как найти закон движения? . . . 42

10 Сила упругости **44**
10.1 Деформация . . . 44
10.2 Закон Гука . . . 44
10.3 Модуль Юнга . . . 45

11 Сила тяготения **46**
11.1 Закон всемирного тяготения . . . 46
11.2 Сила тяжести . . . 46
11.3 Вес тела. Невесомость . . . 47
11.4 Искусственные спутники . . . 49

12 Сила трения **50**
12.1 Сухое трение . . . 50
12.2 Вязкое трение . . . 52

13 Статика твёрдого тела **53**
13.1 Момент силы . . . 54
13.2 Условия равновесия . . . 54

14 Статика жидкостей и газов **57**
14.1 Гидростатическое давление . . . 57
14.2 Закон Паскаля . . . 58
14.3 Гидравлический пресс . . . 59
14.4 Закон Архимеда . . . 59
14.5 Плавание тел . . . 61

15 Импульс **63**
15.1 Второй закон Ньютона в импульсной форме . . . 63
15.2 Пример вычисления силы . . . 65
15.3 Импульс системы тел . . . 66
15.4 Закон сохранения импульса . . . 67
15.5 Закон сохранения проекции импульса . . . 68

16 Энергия **70**
16.1 Работа . . . 70
16.2 Мощность . . . 71
16.3 Механическая энергия . . . 72
16.4 Кинетическая энергия . . . 72
16.5 Потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли . . . 73
16.6 Потенциальная энергия деформированной пружины . . . 74
16.7 Закон сохранения механической энергии . . . 75
16.8 Закон изменения механической энергии . . . 75

17 Простые механизмы **77**
17.1 Рычаг . . . 77
17.2 Неподвижный блок . . . 77
17.3 Подвижный блок . . . 78
17.4 Наклонная плоскость . . . 78
17.5 Золотое правило механики . . . 79
17.6 КПД механизма . . . 80

18 Механические колебания **82**
18.1 Гармонические колебания . . . 82
18.2 Уравнение гармонических колебаний . . . 84
18.3 Пружинный маятник . . . 85
18.4 Математический маятник . . . 86
18.5 Свободные и вынужденные колебания . . . 87

19 Механические волны **89**
19.1 Продольные и поперечные волны . . . 89
19.2 Звук . . . 90

1 Производная

Пункты 1.1–1.5 являются сокращённым изложением материала статьи «Производная», которая сама по себе является обязательной к прочтению.

Производная скалярной или векторной функции есть скорость изменения этой функции. В физике мы постоянно интересуемся быстротой изменения каких-либо величин. Вот почему использование производной пронизывает всю физику.

Строгое математическое определение производной опирается на понятие предела, которое в школе не проходят. Но определение предела нам сейчас и незачем. Самое главное — уловить основную идею, которая лежит в основе понятия предела.

1.1 Предел

Рассмотрим последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Изобразим члены данной последовательности на числовой оси (рис. 1).

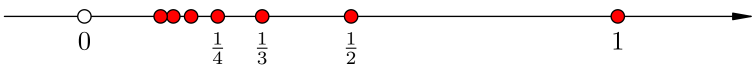

Рис. 1. Последовательность чисел $1/n$ $(n \in \mathbb{N})$

Мы видим, что наши числа неограниченно приближаются к нулю (но никогда его не достигают). Начиная с $n = 10$ все члены последовательности окажутся на расстоянии не более $1/10$ от нуля; начиная с $n = 100$ все они будут на расстоянии не более $1/100$ от нуля; начиная с $n = 1000$ все они будут на расстоянии не более $1/1000$ от нуля и т. д.

Говорят, что последовательность $1/n$ *стремится к нулю*, или *сходится к нулю*, или что *предел* этой последовательности равен нулю. Записывают это так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Образно говоря, наша последовательность «втекает» в точку 0. Понятие предела как раз и отражает факт этого «втекания».

Точно так же последовательность

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

будет «втекать» в точку 3. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3.$$

Подчеркнём, что «втекание последовательности в точку a» означает, что вблизи числа a находятся *все* члены данной последовательности, начиная с некоторого номера. Более точно, смысл выражения «предел последовательности a_n равен a» таков: какое бы расстояние ε мы наперёд ни задали, *все* числа a_n, начиная с некоторого номера, будут находиться от числа a на расстоянии меньше ε.

Например, закопеременная последовательность $1, -1, 1, -1, \ldots$ не имеет предела: она не «втекает» ни в какую точку. Почему, например, число 1 не является пределом данной последовательности? Потому что найдётся бесконечно много членов последовательности (а именно, все члены с чётными номерами, равные -1), удалённых от точки 1 на расстояние 2. Иными словами, не найдётся такого номера, начиная с которого все члены данной последовательности окажутся достаточно близко к точке 1.

Можно говорить не только о пределе последовательности, но и о пределе функции. Напомним, что функция $y = f(x)$ — это некоторое правило, которое позволяет для любого допустимого числа x получить единственное соответствующее ему число y. При этом число x называется *аргументом* функции, а число y — *значением* функции.

Нас будет интересовать понятие предела функции в точке. Оно формализует ту же самую идею «втекания». Только на сей раз график функции $y = f(x)$ будет «втекать» в некоторую точку координатной плоскости, когда аргумент x стремится к некоторому значению.

Так, на рис. 2 вы видите хорошо известную параболу — график функции $y = x^2$. Возьмём значение $x = 2$ и отметим на графике соответствующую точку $A(2, 4)$.

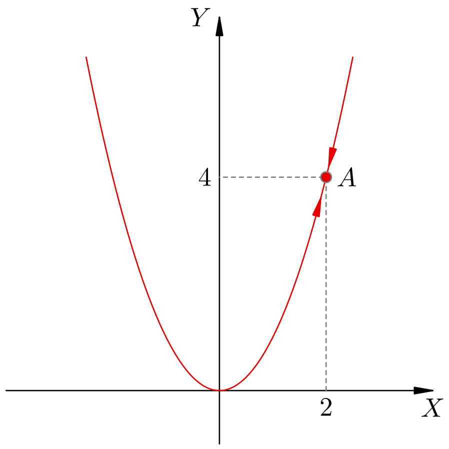

Рис. 2. График функции $y = x^2$

Представим себе, что x приближается к 2 (справа или слева — неважно). При этом график «втекает» в точку A, что и показано на рисунке стрелками. Иными словами, значение функции стремится к 4, и данный факт записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4. \tag{1}$$

«А что тут такого особенного? — скажете вы. — Ясно же, что если x стремится к 2, то x^2 стремится к $2^2 = 4$. Зачем огород городить, говоря о каких-то пределах?»

Здесь не всё так просто. Взгляните на рис. 3.

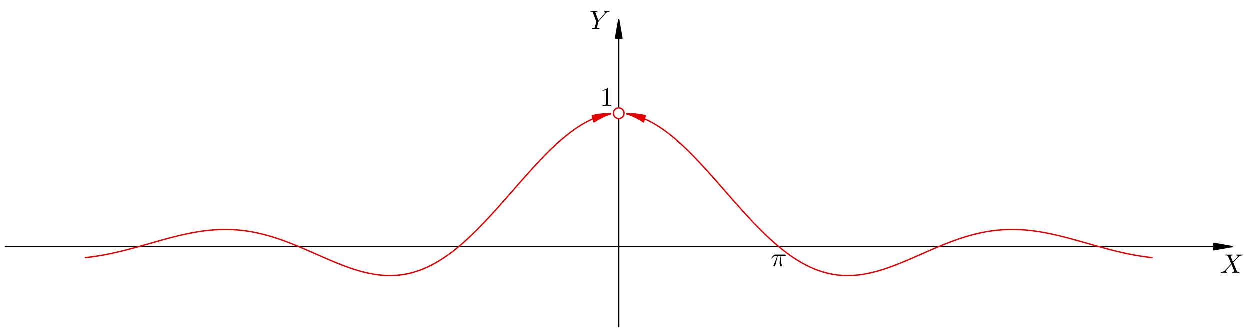

Рис. 3. График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$

Перед вами график функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

И вот что интересно: значение функции при $x = 0$ не определено (при попытке вычислить $f(0)$ мы получаем нуль в знаменателе), но при этом график «втекает» в точку $(0, 1)$. То есть, хотя $f(0)$ не существует, тем не менее при $x \to 0$ значение функции стремится к числу 1. Иными словами, существует предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2}$$

Он называется *первым замечательным пределом.*

Вы легко можете убедиться в справедливости формулы (2), взяв в руки калькулятор. Переведите его в режим «радианы» и вычислите:

$$\frac{\sin 0{,}1}{0{,}1}, \quad \frac{\sin 0{,}01}{0{,}01}, \quad \frac{\sin 0{,}001}{0{,}001}, \quad \ldots$$

Вы увидите, что значение дроби становится всё ближе и ближе к единице.

Уяснив, что такое предел, мы теперь обсудим важнейшее физическое понятие *мгновенной скорости.* Оно вплотную подведёт нас к определению производной.

1.2 Мгновенная скорость

Спидометр автомобиля показывает 60 км/ч. Что это значит? Ответ простой: если автомобиль будет ехать так в течение часа, то он проедет 60 км.

Допустим, однако, что автомобиль вовсе не собирается ехать так целый час. Например, водитель разгоняет автомобиль с места, давит на газ, в какой-то момент бросает взгляд на спидометр и видит стрелку на отметке 60 км/ч. В следующий момент стрелка уползёт ещё выше. Как же понимать, что *в данный момент времени* скорость равна 60 км/ч?

Давайте выясним это на примере. Предположим, что путь s, пройденный автомобилем, зависит от времени t следующим образом:

$$s(t) = t^2,$$

где путь измеряется в метрах, а время — в секундах. То есть, при $t = 0$ путь равен нулю, к моменту времени $t = 1$ пройденный путь равен $s(1) = 1$, к моменту времени $t = 2$ путь равен $s(2) = 4$, к моменту времени $t = 3$ путь равен $s(3) = 9$, и так далее.

Видно, что идёт разгон, то есть автомобиль набирает скорость с течением времени. Действительно:

- за первую секунду пройдено расстояние 1;
- за вторую секунду пройдено расстояние $s(2) - s(1) = 3$;
- за третью секунду пройдено расстояние $s(3) - s(2) = 5$,

и далее по нарастающей.

А теперь вопрос. Пусть, например, через три секунды после начала движения наш водитель взглянул на спидометр. Что покажет стрелка? Иными словами, какова *мгновенная* скорость автомобиля в момент времени $t = 3$?

Просто поделить путь на время не получится: привычная формула $v = s/t$ работает только для *равномерного* движения (то есть когда стрелка спидометра застыла в некотором фиксированном положении). Но именно эта формула лежит в основе способа, позволяющего найти мгновенную скорость.

Идея способа такова. Отсчитаем от нашего момента $t = 3$ небольшой промежуток времени Δt, найдём путь Δs, пройденный автомобилем за этот промежуток, и поделим Δs на Δt. *Чем меньше будет Δt, тем точнее мы приблизимся к искомой величине мгновенной скорости.*

Давайте посмотрим, как эта идея реализуется. Возьмём для начала $\Delta t = 1$. Тогда

$$\Delta s = s(4) - s(3) = 4^2 - 3^2 = 7,$$

и для скорости получаем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7}{1} = 7 \qquad (3)$$

(скорость, разумеется, измеряется в м/с).

Будем уменьшать промежуток Δt. Берём $\Delta t = 0{,}1$:

$$\Delta s = s(3{,}1) - s(3) = 3{,}1^2 - 3^2 = 0{,}61,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}61}{0{,}1} = 6{,}1. \qquad (4)$$

Теперь берём $\Delta t = 0{,}01$:

$$\Delta s = s(3{,}01) - s(3) = 3{,}01^2 - 3^2 = 0{,}0601,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}0601}{0{,}01} = 6{,}01. \qquad (5)$$

Ну и возьмём ещё $\Delta t = 0{,}001$:

$$\Delta s = s(3{,}001) - s(3) = 3{,}001^2 - 3^2 = 0{,}006001,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}006001}{0{,}001} = 6{,}001. \qquad (6)$$

Глядя на значения (3)–(6), мы понимаем, что величина $\Delta s/\Delta t$ приближается к числу 6. Это означает, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени $t = 3$ составляет 6 м/с.

Таким образом, при безграничном уменьшении Δt путь Δs также стремится к нулю, но отношение $\Delta s/\Delta t$ стремится к некоторому пределу v, который и называется *мгновенной скоростью* в данный момент времени t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,. \qquad (7)$$

Можно написать и так:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}\,. \qquad (8)$$

Давайте вернёмся к нашему примеру с $s(t) = t^2$ и проделаем в общем виде те выкладки, которые выше были выполнены с числами. Итак:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = (t + \Delta t)^2 - t^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2 = \Delta t(2t + \Delta t),$$

и для мгновенной скорости имеем:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t. \qquad (9)$$

В частности, при $t = 3$ формула (9) даёт: $v(3) = 2 \cdot 3 = 6$, как и было получено выше.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми предварительными сведениями и полностью готовы перейти к обсуждению производной.

1.3 Определение производной

Скорость бывает не только у автомобиля. Мы можем говорить о скорости изменения чего угодно — например, физической величины или экономического показателя. Производная как раз и служит обобщением понятия мгновенной скорости на случай абстрактных математических функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Напомним, что x называется *аргументом* данной функции. Отметим на оси X некоторое значение аргумента x, а на оси Y — соответствующее значение функции $f(x)$ (рис. 4).

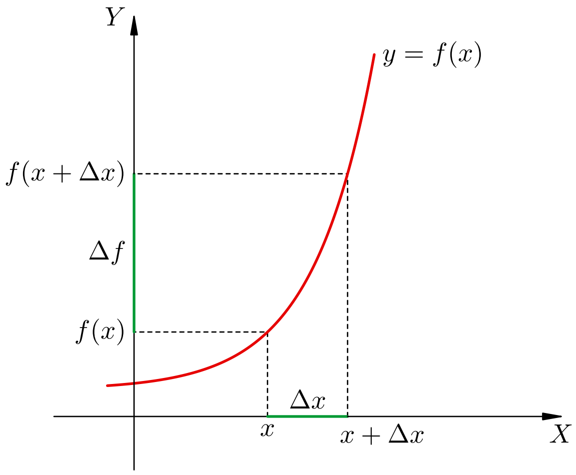

Рис. 4. Приращение аргумента и приращение функции

Дадим аргументу x некоторое *приращение*, обозначаемое Δx. Попадём в точку $x + \Delta x$. Обозначим её на рисунке вместе с соответствующим значением функции $f(x + \Delta x)$.

Величина

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{10}$$

называется *приращением функции*, которое отвечает данному приращению аргумента Δx.

Вы видите сходство с предыдущим пунктом? Приращение аргумента Δx есть абстрактный аналог промежутка времени Δt, а соответствующее приращение функции Δf — это аналог пути Δs, пройденного за время Δt. Но на этом аналогия не заканчивается. Производная — это в точности аналог мгновенной скорости.

Определение. Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \,. \tag{11}$$

Сравните с формулами (7) и (8). По сути написано одно и то же, не правда ли? Можно сказать, что производная — это мгновенная скорость изменения функции.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием*. Нам предстоит научиться дифференцировать различные функции.

Прежде всего нужно знать несколько стандартных производных, которые называются табличными. Самые простые табличные производные вычисляются непосредственно с помощью формулы (11).

1.4 Табличные производные

Начнём с функции, которая является константой: $f(x)=c$. Приращение этой функции равно нулю:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Соответственно, обращается в нуль и производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

Итак, имеем первый результат — *производная константы равна нулю*:

$$\boxed{c' = 0.}$$

Теперь будем дифференцировать степенную функцию, то есть функцию вида $f(x)=x^a$. Найдём производную простейшей такой функции: $f(x)=x$. Приращение функции:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1.$$

Итак,

$$x' = 1.$$

Перейдём к функции $f(x)=x^2$. Это абстрактный аналог рассмотренной выше физической ситуации с $s(t)=t^2$, в которой мы искали мгновенную скорость. Нам остаётся лишь повторить (в других обозначениях) те вычисления, которые привели нас к формуле (9).

Приращение функции:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \Delta x(2x+\Delta x).$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Таким образом,

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

Точно так же можно показать, что:

$$\begin{gathered}\left(x^3\right)' = 3x^2,\\ \left(x^4\right)' = 4x^3,\\ \ldots\\ \left(x^n\right)' = nx^{n-1}.\end{gathered}$$

Оказывается, последняя формула справедлива не только для целого n, но и вообще для любого показателя степени a:

$$\boxed{(x^a)' = ax^{a-1},\quad a\in\mathbb{R}.} \tag{12}$$

Найдём с помощью этой формулы производную функции $f(x)=\sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Эта производная встречается очень часто, и её имеет смысл выучить. Запомнить можно так: «производная корня есть один делить на два корня».

Перейдём к тригонометрическим функциям: синусу и косинусу. Вычисления с помощью формулы (11) и первого замечательного предела приводят к следующему результату:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.}$$

Четыре производных в рамочке (константа, степенная функция, синус и косинус), как мы сказали выше, называются *табличными*. Эти производные нужно твёрдо знать.

Вычисления производной по определению (то есть как предела) легко проходят для функций, устроенных наиболее просто. А как быть, если нужно продифференцировать функцию наподобие такой: $f(x) = x^7 \sin \sqrt[3]{4x^2 - 5x}$? Здесь вычислять предел (11) — занятие не из приятных. В подобных случаях на помощь приходят *правила дифференцирования*, которые позволяют сконструировать производную данной функции из производных более простых функций.

1.5 Правила дифференцирования

Как мы уже сказали, правила дифференцирования позволяют находить производные функций достаточно сложного вида. Идея состоит в «расщеплении» исходной функции на более простые функции, производные которых известны и играют роль «кирпичиков» при конструировании искомой производной. Зная небольшое число табличных производных и располагая правилами дифференцирования, мы можем вычислять производные огромного количества функций, не прибегая к определению производной и не вычисляя соответствующий предел (11).

Всего имеется пять правил дифференцирования. Мы приводим их здесь без доказательства. Функции $u(x)$ и $v(x)$ являются теми самыми «кирпичиками», из которых строятся функции более сложного вида.

0. Константа выносится за знак производной. Если c — число, то $(cu)' = cu'$.

Данное правило легко получается в качестве следствия правила 2 о дифференцировании произведения. Но применяется оно настолько часто, что мы сделали его «нулевым» правилом, обособленным от остальных.

Согласно этому правилу имеем, например:

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 10x,$$
$$(-3\sin x)' = -3(\sin x)' = -3\cos x.$$

1. Дифференцирование суммы. $(u + v)' = u' + v'$ (*производная суммы равна сумме производных*).

Так, применяя правила 0 и 1, находим:

$$(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x,$$
$$(x^3 + 4\cos x - 10)' = (x^3)' + (4\cos x)' + (-10)' = 3x^2 - 4\sin x$$

(производная константы -10 равна нулю!).

2. Дифференцирование произведения. $(uv)' = u'v + uv'$.

Вот пример дифференцирования произведения:

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

А вот как получается правило 0:

$$(cu)' = c'u + cu' = cu',$$

поскольку $c' = 0$.

3. Дифференцирование частного.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\,.$$

Правило дифференцирования частного позволяет найти, например, производную тангенса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Нам осталось обсудить последнее правило — дифференцирование сложной функции. Мы сначала объясним, что такое сложная функция, затем продемонстрируем правило дифференцирования на примерах, и только потом — когда станет ясно, как оно работает — дадим формулировку этого правила.

Пусть, например, $u(x) = \sin x$ и $v(x) = \sqrt{x}$. Давайте сначала извлекать корень из x (то есть применять к x функцию v), а потом брать синус полученного числа (то есть действовать на полученное число $v(x)$ функцией u). Тогда возникает функция:

$$u(v(x)) = \sin\sqrt{x}.$$

Это и есть *сложная* функция, или *композиция* функций u и v. Идея понятна: число x поступает на вход *первой* функции v, а полученное число $v(x)$ поступает на вход *второй* функции u.

Можно, наоборот, сделать u первой функцией, а v — второй. Тогда сначала от x будет вычисляться синус, а потом из синуса извлекаться корень. Получится другая сложная функция:

$$v(u(x)) = \sqrt{\sin x}.$$

Дифференцирование сложной функции — это как снятие листов с кочана капусты. Сначала находим производную второй («внешней») функции и умножаем её на производную первой («внутренней») функции. Применительно к нашим примерам это выглядит так:

$$(\sin\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

$$(\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x.$$

Приведём для ясности ещё один пример:

$$[(4x^2+3x+2)^5]' = 5(4x^2+3x+2)^4\cdot(4x^2+3x+2)' = 5(4x^2+3x+2)^4\cdot(8x+3).$$

И ещё пример (очень важный для физики; здесь A, ω и α — константы):

$$[A\sin(\omega x+\alpha)]' = A\cos(\omega x+\alpha)\cdot(\omega x+\alpha)' = A\omega\cos(\omega x+\alpha).$$

Понятно, как работает правило? Тогда — формулировка.

4. Дифференцирование сложной функции. $[u(v(x))]' = u'(v(x))v'(x)$.

1.6 Обозначения производной в физике

Переходя к физическим приложениям производной, мы будем использовать несколько иные обозначения — те, которые приняты в физике.

Во-первых, меняется обозначение функций. В самом деле, какие функции мы собираемся дифференцировать? Этими функциями служат физические величины, зависящие от времени. Например, координата тела $x(t)$ и его скорость $v(t)$ могут быть заданы формулами:

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2, \tag{13}$$

$$v(t) = 12 - 6t. \tag{14}$$

Таким образом, аргументом функции теперь является время t, а буква x отныне обозначает функцию — координату точки.

Во-вторых, меняется обозначение производной. Штрих в физике зарезервирован для других целей, и вместо него мы используем точку над буквой:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \dot{x}(t) \tag{15}$$

(читается «икс с точкой»).

Имеется ещё одно обозначение производной, очень распространённое как в математике, так и в физике:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{dx}{dt} \tag{16}$$

(читается «дэ икс по дэ тэ»).

Остановимся подробнее на смысле обозначения (16). Математик понимает его двояко — либо как предел:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,, \tag{17}$$

либо как дробь, в знаменателе которой стоит приращение времени dt, а в числителе — так называемый *дифференциал* dx функции $x(t)$. Понятие дифференциала не сложно, но мы не будем его сейчас обсуждать; оно ждёт вас на первом курсе.

Физик, не скованный требованиями математической строгости, понимает обозначение (16) более неформально. Пусть dx есть изменение координаты за время dt. Возьмём интервал dt настолько маленьким, что отношение dx/dt близко к своему пределу (17) с устраивающей нас точностью.

И тогда, — скажет физик, — *производная координаты по времени есть попросту дробь, в числителе которой стоит достаточно малое изменение координаты dx, а в знаменателе — достаточно малый промежуток времени dt, в течение которого это изменение координаты произошло.*

Такое нестрогое понимание производной характерно для рассуждений в физике. Далее мы будем придерживаться именно этого физического уровня строгости.

Производная $\dot{x}(t)$ физической величины $x(t)$ снова является функцией времени, и эту функцию снова можно продифференцировать — найти производную производной, или *вторую производную* функции $x(t)$. Вот одно обозначение второй производной:

$$\text{вторая производная функции } x(t) \text{ обозначается } \ddot{x}(t)$$

(читается «икс с двумя точками»), а вот другое:

$$\text{вторая производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{d^2x}{dt^2}$$

(читается «дэ два икс по дэ тэ квадрат» или «дэ два икс по дэ тэ дважды»).

Давайте вернёмся к исходному примеру (13) и посчитаем производную координаты, а заодно посмотрим на совместное использование обозначений (15) и (16):

$$
\begin{aligned}
&x(t) = 1 + 12t - 3t^2 \Rightarrow \\
&\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(1 + 12t - 3t^2) = 12 - 6t.
\end{aligned}
$$

(Символ дифференцирования $\frac{d}{dt}$ перед скобкой — это всё равно что штрих сверху за скобкой в прежних обозначениях.)

Обратите внимание, что производная координаты оказалась равна скорости (14). Это не случайное совпадение. Связь производной координаты со скоростью тела будет выяснена в следующем разделе «Механическое движение».

1.7 Предел векторной величины

Физические величины бывают не только скалярными, но и векторными. Соответственно, часто нас интересует скорость изменения векторной величины — то есть, производная вектора. Однако прежде чем говорить о производной, нужно разобраться с понятием предела векторной величины.

Рассмотрим последовательность векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots$ Сделав, если необходимо, параллельный перенос, сведём их начала в одну точку O (рис. 5):

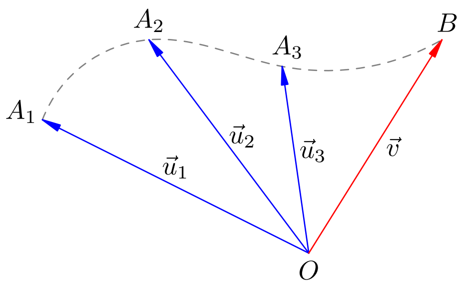

Рис. 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{u}_n = \vec{u}$

Концы векторов обозначим $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Таким образом, имеем:

$$
\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \vec{u}_2 = \overrightarrow{OA_2}, \quad \vec{u}_3 = \overrightarrow{OA_3}, \quad \ldots
$$

Предположим, что последовательность точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$ «втекает»[1] в точку B:

$$
\lim_{n\to\infty} A_n = B.
$$

Обозначим $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Мы скажем тогда, что последовательность синих векторов $\vec{u}_n$ стремится к красному вектору $\vec{v}$, или что вектор $\vec{v}$ является пределом последовательности векторов $\vec{u}_n$:

$$
\vec{v} = \lim_{n\to\infty} \vec{u}_n.
$$

[1]Вполне достаточно интуитивного понимания этого «втекания», но вас, быть может, интересует более строгое объяснение? Тогда вот оно.

Пусть дело происходит на плоскости. «Втекание» последовательности $A_1, A_2, A_3, \ldots$ в точку B означает следующее: сколь бы малый круг с центром в точке B мы ни взяли, *все* точки последовательности, начиная с некоторой, попадут внутрь этого круга. Иными словами, вне любого круга с центром B имеется лишь конечное число точек нашей последовательности.

А если дело происходит в пространстве? Определение «втекания» модифицируется незначительно: нужно лишь заменить слово «круг» на слово «шар».

Предположим теперь, что концы синих векторов на рис. 5 пробегают не дискретный набор значений, а непрерывную кривую (например, указанную пунктирной линией). Таким образом, мы имеем дело не с последовательностью векторов $\vec{u}_n$, а с вектором $\vec{u}(t)$, который меняется со временем. Это как раз то, что нам и нужно в физике!

Дальнейшее объяснение почти такое же. Пусть t стремится к некоторому значению t_0. Если при этом концы векторов $\vec{u}(t)$ «втекают» в некоторую точку B, то мы говорим, что вектор $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ является пределом векторной величины $\vec{u}(t)$:

$$\vec{v} = \lim_{t \to t_0} \vec{u}(t).$$

1.8 Дифференцирование векторов

Выяснив, что такое предел векторной величины, мы готовы сделать следующий шаг — ввести понятие производной вектора.

Предположим, что имеется некоторый вектор $\vec{u}(t)$, зависящий от времени. Это означает, что длина данного вектора и его направление могут меняться с течением времени.

По аналогии с обычной (скалярной) функцией вводится понятие изменения (или приращения) вектора. *Изменение вектора* $\vec{u}$ за время Δt есть векторная величина:

$$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t).$$

Обратите внимание, что в правой части данного соотношения стоит *разность векторов*. Изменение вектора $\vec{u}$ показано на рис. 6 (напомним, что при вычитании векторов мы сводим их начала в одну точку, соединяем концы и «укалываем» стрелкой тот вектор, из которого производится вычитание).

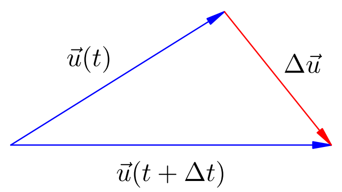

Рис. 6. Изменение вектора

Если промежуток времени Δt достаточно мал, то и вектор $\vec{u}$ за это время меняется мало (в физике, по крайней мере, так считается всегда). Соответственно, если при $\Delta t \to 0$ отношение $\Delta\vec{u}/\Delta t$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *производной вектора* $\vec{u}$:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}\,. \tag{18}$$

При обозначении производной вектора мы не будем использовать точку сверху (так как символ $\dot{\vec{u}}$ не слишком хорошо смотрится) и ограничиваемся обозначением (18). Но для производной скаляра мы, разумеется, свободно используем оба обозначения.

Напомним, что $d\vec{u}/dt$ — это *символ* производной. Его можно понимать и как дробь, в числителе которой стоит *дифференциал* вектора $\vec{u}$, соответствующий промежутку времени dt. Выше мы не стали обсуждать понятие дифференциала, так как в школе его не проходят; не будем обсуждать дифференциал и здесь.

Однако на физическом уровне строгости производную $d\vec{u}/dt$ можно считать дробью, в знаменателе которой стоит очень малый интервал времени dt, а в числителе — соответствующее малое изменение $d\vec{u}$ вектора $\vec{u}$. При достаточно малом dt величина данной дроби отличается от предела в правой части (18) столь мало, что с учётом имеющейся точности измерений этим отличием можно пренебречь.

Этого (не вполне строгого) физического понимания производной нам окажется вполне достаточно.

Правила дифференцирования векторных выражений во многом аналогичны правилам дифференцирования скаляров. Нам понадобятся лишь самые простые правила.

1. Постоянный скалярный множитель выносится за знак производной: если $c = \text{const}$, то

$$\frac{d(c\vec{u})}{dt} = c\,\frac{d\vec{u}}{dt}\,.$$

   Мы используем это правило в разделе «Импульс», когда второй закон Ньютона

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

   будет переписан в виде:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

2. Постоянный векторный множитель выносится за знак производной: если $\vec{c} = \text{const}$, то

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\vec{c}\right) = \dot{x}(t)\vec{c}.$$

3. Производная суммы векторов равна сумме их производных:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}\,.$$

Последними двумя правилами мы будем пользоваться неоднократно. Посмотрим, как они работают в важнейшей ситуации дифференцирования вектора при наличии в пространстве прямоугольной системы координат $OXYZ$ (рис. 7).

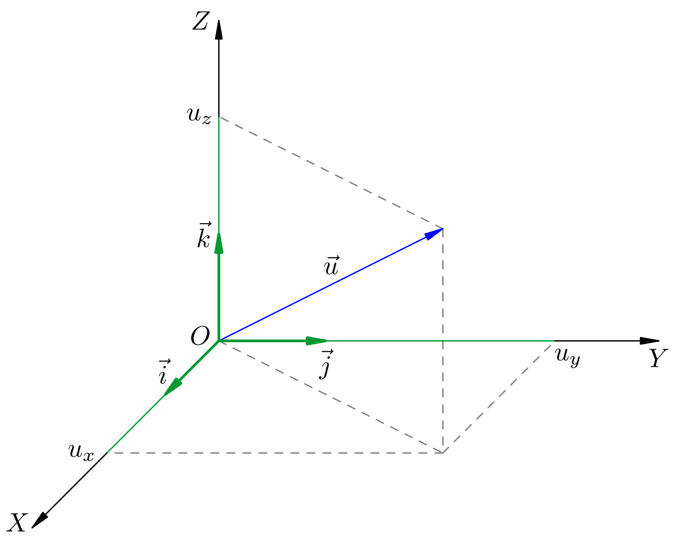

Рис. 7. Разложение вектора по базису

Как известно, любой вектор $\vec{u}$ единственным образом раскладывается по базису единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}.$$

Здесь u_x, u_y, u_z — проекции вектора $\vec{u}$ на координатные оси. Они же являются координатами вектора $\vec{u}$ в данном базисе.

Вектор $\vec{u}$ в нашем случае зависит от времени, а это значит, что его координаты u_x, u_y, u_z являются функциями времени:

$$\vec{u}(t) = u_x(t)\,\vec{i} + u_y(t)\,\vec{j} + u_z(t)\vec{k}. \tag{19}$$

Дифференцируем это равенство. Сначала пользуемся правилом дифференцирования суммы:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(u_x(t)\vec{i}\right) + \frac{d}{dt}\left(u_y(t)\vec{j}\right) + \frac{d}{dt}\left(u_z(t)\vec{k}\right).$$

Затем выносим постоянные векторы за знак производной:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x(t)\vec{i} + \dot{u}_y(t)\vec{j} + \dot{u}_z(t)\vec{k}. \tag{20}$$

Таким образом, если вектор $\vec{u}$ имеет координаты (u_x, u_y, u_z), то координаты производной $d\vec{u}/dt$ являются производными координат вектора $\vec{u}$, а именно — $(\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)$.

Ввиду особой важности формулы (20) дадим более непосредственный её вывод.

В момент времени $t + \Delta t$ согласно (19) имеем:

$$\vec{u}(t+\Delta t) = u_x(t+\Delta t)\,\vec{i} + u_y(t+\Delta t)\,\vec{j} + u_z(t+\Delta t)\vec{k}.$$

Напишем изменение вектора $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{u} &= \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) = \\
&= \Big(u_x(t+\Delta t)\,\vec{i} + u_y(t+\Delta t)\,\vec{j} + u_z(t+\Delta t)\vec{k}\Big) - \Big(u_x(t)\,\vec{i} + u_y(t)\,\vec{j} + u_z(t)\vec{k}\Big) = \\
&= (u_x(t+\Delta t) - u_x(t))\,\vec{i} + (u_y(t+\Delta t) - u_y(t))\,\vec{j} + (u_z(t+\Delta t) - u_z(t))\,\vec{k} = \\
&= \Delta u_x \cdot \vec{i} + \Delta u_y \cdot \vec{j} + \Delta u_z \cdot \vec{k}.
\end{aligned}$$

Делим обе части полученного равенства на Δt:

$$\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta u_x}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta u_y}{\Delta t}\,\vec{j} + \frac{\Delta u_z}{\Delta t}\,\vec{k}.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ дроби $\Delta u_x/\Delta t$, $\Delta u_y/\Delta t$, $\Delta u_z/\Delta t$ переходят соответственно в производные $\dot{u}_x$, $\dot{u}_y$, $\dot{u}_z$, и мы снова получаем соотношение (20):

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x\vec{i} + \dot{u}_y\vec{j} + \dot{u}_z\vec{k}.$$

2 Механическое движение

Понятие движения является чрезвычайно общим и охватывает самый широкий круг явлений. В физике изучают различные виды движения. Простейшим из них является механическое движение.

Механическое движение — это изменение положение тела (или его частей) в пространстве относительно других тел с течением времени.

2.1 Относительность движения

Если тело A меняет своё положение относительно тела B, то и тело B меняет своё положение относительно тела A. Иначе говоря, если тело A движется относительно тела B, то и тело B движется относительно тела A. Механическое движение является *относительным* — для описания движения необходимо указать, относительно какого тела оно рассматривается.

Так, например, можно говорить о движении поезда относительно земли, пассажира относительно поезда, мухи относительно пассажира и т. д. Понятия абсолютного движения и абсолютного покоя не имеют смысла: пассажир, покоящийся относительно поезда, будет двигаться с ним относительно столба на дороге, совершать вместе с Землёй суточное вращение и двигаться по орбите вокруг Солнца.

Тело, относительно которого рассматривается движение, называется *телом отсчёта*.

2.2 Основная задача механики

Основной задачей механики является определение положения движущегося тела в любой момент времени. Для решения этой задачи удобно представить движение тела как изменение координат его точек с течением времени.

Чтобы измерить координаты, нужна система координат. Чтобы измерять время, нужны часы. Всё это вместе образует систему отсчёта.

Система отсчёта — это тело отсчёта вместе с жёстко связанной с ним («вмороженной» в него) системой координат и часами.

Система отсчёта показана на рис. 8. Движение точки M рассматривается в прямоугольной системе координат $OXYZ$. Начало координат O является телом отсчёта.

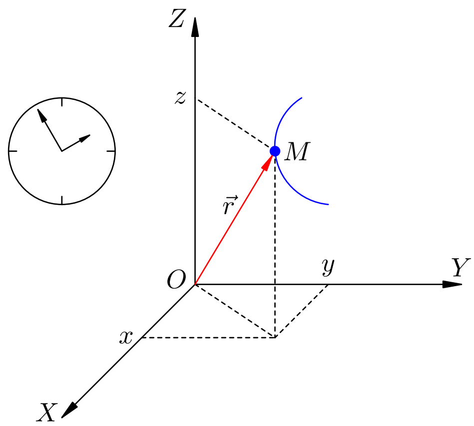

Рис. 8. Система отсчёта

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. Три координаты x, y, z точки M являются в то же время координатами её радиус-вектора $\vec{r}$.

Решить основную задачу механики для точки M — это значит найти её координаты как функции времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \tag{21}$$

или, что то же самое, — найти зависимость радиус-вектора точки M от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{22}$$

Соотношения (21) или (22) мы будем называть *законом движения*. Таким образом, решение основной задачи механики для точки M состоит в нахождении закона движения этой точки.

2.3 Материальная точка

В ряде случаев можно отвлечься от формы и размеров изучаемого объекта и рассматривать его просто как движущуюся точку.

Материальная точка — это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Так, поезд можно считать материальной точкой при его движении из Москвы в Саратов, но не при посадке в него пассажиров. Землю можно считать материальной точкой при описании её движения вокруг Солнца, но не её суточного вращения вокруг собственной оси.

К характеристикам механического движения материальной точки относятся траектория, путь, перемещение, скорость и ускорение.

2.4 Траектория, путь, перемещение

В дальнейшем, говоря о движущемся (или покоящемся) теле, мы всегда полагаем, что тело можно принять за материальную точку. Случаи, когда идеализацией материальной точки пользоваться нельзя, будут специально оговариваться.

- *Траектория* — это линия, вдоль которой движется тело. На рис. 8 траекторией точки M является синяя дуга, которую описывает в пространстве конец радиус-вектора $\vec{r}$.
- *Путь* — это длина участка траектории, пройденного телом за данный промежуток времени.
- *Перемещение* — это вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела.

Предположим, что тело начало движение в точке A и закончило движение в точке B (рис. 9).

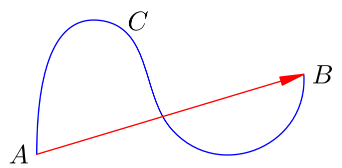

Рис. 9. Путь и перемещение

Путь, пройденный телом, есть длина синей дуги — траектории ACB. Перемещение тела — это красный вектор $\overrightarrow{AB}$.

2.5 Скорость

В предыдущем разделе «Производная» уже говорилось о мгновенной скорости. Мы определили её как предел:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,,$$

где Δs — путь, пройденный за малый промежуток времени Δt. При таком определении мгновенная скорость оказывается не чем иным, как производной пути s:

$$v = \frac{ds}{dt}\,. \tag{23}$$

Данное определение, однако, не охватывает всего разнообразия ситуаций, встречающихся в механике. Дело в том, что скорость является *вектором* — она обладает как абсолютной величиной (модулем), так и направлением в пространстве. Между тем, формула (23) говорит нам лишь о модуле скорости, но не об её направлении. Стало быть, определение (23) нуждается в обобщении.

Рассмотрим движение тела в прямоугольной системе координат с базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 10).

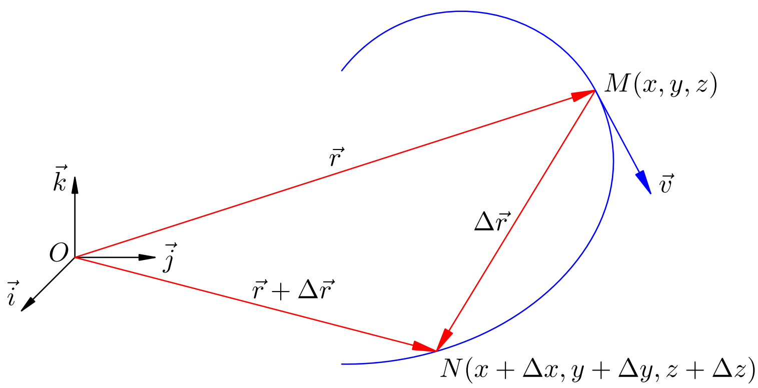

Рис. 10. К определению мгновенной скорости

Пусть в момент времени t тело находилось в точке $M(x, y, z)$ с радиус-вектором

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{24}$$

Спустя малый промежуток времени Δt тело оказалось в точке $N(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ с радиус-вектором

$$\overrightarrow{ON} = \vec{r} + \Delta\vec{r}.$$

Перемещение тела есть вектор $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{MN}$. Теперь мы будем говорить не о пределе отношения $\Delta s/\Delta t$ пути ко времени, а о пределе отношения $\Delta\vec{r}/\Delta t$ перемещения ко времени — и тем самым придём к нужному нам обобщению понятия мгновенной скорости на векторный случай.

Итак, *мгновенная скорость* $\vec{v}$ в момент времени t — это предел отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени Δt, когда величина этого интервала стремится к нулю; иными словами, скорость точки — это производная её радиус-вектора:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,. \tag{25}$$

Отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ — это вектор, направленный вдоль секущей MN. Когда Δt стремится к нулю, точка N приближается к точке M, а секущая MN превращается в касательную. Соответственно, вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в точке M. Это и показано на рис. 10.

Продолжаем вычисления в координатах. Пользуясь равенством (24) и правилами дифференцирования векторов, получим:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \tag{26}$$

С другой стороны, вектор $\vec{v}$ единственным образом раскладывается по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \tag{27}$$

Сопоставляя формулы (26) и (27), мы видим, что проекции вектора скорости на координатные оси являются производными координат точки:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

2.6 Ускорение

Формула (25) говорит о том, что вектор скорости характеризует быстроту изменения радиус-вектора тела. Но скорость тела также может меняться — быстрее или медленнее. Ускорение — это характеристика быстроты изменения вектора скорости.

Предположим, что в момент времени t скорость тела равна $\vec{v}$, а спустя малый интервал Δt скорость стала равна $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.

Ускорение $\vec{a}$ — это предел отношения изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу Δt, когда этот интервал стремится к нулю; иначе говоря, ускорение — это производная скорости:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,.$$

Ускорение, так сказать, есть «скорость изменения скорости». Имеем:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}.$$

Следовательно, проекции ускорения являются производными проекций скорости:

$$a_x = \dot{v}_x, \quad a_y = \dot{v}_y, \quad a_z = \dot{v}_z.$$

Скорость, в свою очередь, есть производная радиус-вектора. Поэтому ускорение, будучи производной скорости, оказывается *второй производной* радиус-вектора (то есть результатом двукратного дифференцирования вектора $\vec{r}$):

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,.$$

Соответственно, проекции ускорения являются вторыми производными координат точки:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

2.7 Примеры вычисления скорости и ускорения

Итак, знание закона движения (зависимости координат тела от времени) позволяет находить скорость и ускорение тела — нужно лишь вычислить первые и вторые производные координат. Рассмотрим несколько примеров таких вычислений.

Пример. Вернёмся к примеру (13):

$$x = 1 + 12t - 3t^2$$

(координата измеряется в метрах, время — в секундах). Последовательно дифференцируя два раза, получаем:

$$v_x = \dot{x} = 12 - 6t,$$
$$a_x = \dot{v}_x = -6.$$

Как видим, ускорение постоянно по модулю и равно 6 м/с^2. Направлено ускорение в сторону, противоположную оси X.

Приведённый пример есть случай *равноускоренного* движения, при котором модуль и направление ускорения неизменны. Равноускоренное движение — один из важнейших и часто встречающихся видов движения в механике.

Из данного примера нетрудно понять, что при равноускоренном движении проекция скорости является линейной функцией времени, а координата — квадратичной функцией. Мы поговорим об этом более подробно в соответствующем разделе, посвящённом равноускоренному движению.

Пример. Рассмотрим более экзотический случай:

$$x = 2 + 3t - 4t^2 + 5t^3.$$

Дифференцируем:

$$v_x = \dot{x} = 3 - 8t + 15t^2,$$
$$a_x = \dot{v}_x = -8 + 30t.$$

Данное движение не является равноускоренным: ускорение зависит от времени.

Пример. Пусть тело движется вдоль оси X по следующему закону:

$$x = 5\sin 2t.$$

Мы видим, что координата тела периодически изменяется, находясь в пределах от -5 до 5. Данное движение является примером *гармонических колебаний*, когда координата меняется со временем по закону синуса.

Дифференцируем дважды:

$$v_x = \dot{x} = 5\cos 2t \cdot 2 = 10\cos 2t,$$
$$a_x = \dot{v}_x = -20\sin 2t.$$

Проекция скорости меняется по закону косинуса, а проекция ускорения — снова по закону синуса. Величина a_x пропорциональна координате x и противоположна ей по знаку (а именно, $a_x = -4x$); вообще, соотношение вида $a_x = -\omega^2 x$ характерно для гармонических колебаний.

2.8 Закон сложения скоростей

Пусть имеются две системы отсчёта. Одна из них связана с неподвижным телом отсчёта O. Эту систему отсчёта обозначим K и будем называть *неподвижной*.

Вторая система отсчёта, обозначаемая K', связана с телом отсчёта O', которое движется относительно тела O со скоростью $\vec{u}$. Эту систему отсчёта называем *движущейся*. Дополнительно предполагаем, что координатные оси системы K' перемещаются параллельно самим себе (нет вращения системы координат), так что вектор $\vec{u}$ можно считать скоростью движущейся системы относительно неподвижной.

Неподвижная система отсчёта K обычно связана с землёй. Если поезд плавно едет по рельсам со скоростью $\vec{u}$, то система отсчёта, связанная с вагоном поезда, будет движущейся системой отсчёта K'.

Заметим, что скорость *любой* точки вагона[2] равна $\vec{u}$. Если муха неподвижно сидит в некоторой точке вагона, то относительно земли муха движется со скоростью $\vec{u}$. Муха *переносится* вагоном, и потому скорость $\vec{u}$ движущейся системы относительно неподвижной называется *переносной скоростью.*

Предположим теперь, что муха поползла по вагону. Тогда появляются ещё две скорости, которые нужно рассмотреть.

Скорость мухи относительно вагона (то есть в движущейся системе K') обозначается $\vec{v}\,'$ и называется *относительной скоростью.*

Скорость мухи относительно земли (то есть в неподвижной системе K) обозначается $\vec{v}$ и называется *абсолютной скоростью.*

Выясним, как связаны друг с другом эти три скорости — абсолютная, относительная и переносная.

На рис. 11 муха обозначена точкой M. Далее:

$\vec{r}$ — радиус-вектор точки M в неподвижной системе K;

$\vec{r}\,'$ — радиус-вектор точки M в движущейся системе K';

$\vec{R}$ — радиус-вектор тела отсчёта O' в неподвижной системе K.

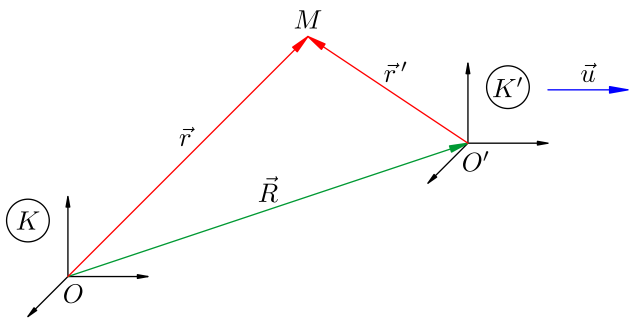

Рис. 11. К выводу закона сложения скоростей

Как видно из рисунка,

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'.$$

Дифференцируя это равенство, получим:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\,. \tag{28}$$

Производная $d\vec{r}/dt$ есть скорость точки M в системе K, то есть абсолютная скорость:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Аналогично, производная $d\vec{r}\,'/dt$ есть скорость точки M в системе K', то есть относительная скорость:

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}\,'.$$

[2]Кроме вращающихся колёс, но их мы не берём во внимание.

А что такое $d\vec{R}/dt$? Это скорость точки O' в неподвижной системе, то есть — переносная скорость $\vec{u}$ движущейся системы относительно неподвижной:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{u}.$$

В результате из (28) получаем:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}\,'.$$

Закон сложения скоростей. Скорость точки относительно неподвижной системы отсчёта равна векторной сумме скорости движущейся системы и скорости точки относительно движущейся системы. Иными словами, абсолютная скорость есть сумма переносной и относительной скоростей.

Таким образом, если муха ползёт по движущемуся вагону, то скорость мухи относительно земли равна векторной сумме скорости вагона и скорости мухи относительно вагона. Интуитивно очевидный результат!

2.9 Виды механического движения

Простейшими видами механического движения материальной точки являются равномерное и прямолинейное движения.

Движение называется *равномерным*, если модуль вектора скорости остаётся постоянным (направление скорости при этом может меняться).

Движение называется *прямолинейным*, если оно происходит вдоль некоторой прямой (величина скорости при этом может меняться). Иными словами, траекторией прямолинейного движения служит прямая линия.

Например, автомобиль, который едет с постоянной скоростью по извилистой дороге, совершает равномерное (но не прямолинейное) движение. Автомобиль, разгоняющийся на прямом участке шоссе, совершает прямолинейное (но не равномерное) движение.

А вот если при движении тела остаются постоянными как модуль скорости, так и её направление, то движение называется *равномерным прямолинейным*. Итак:

- равномерное движение $\Leftrightarrow |\vec{v}| = \text{const}$;
- равномерное прямолинейное движение $\Leftrightarrow \vec{v} = \text{const}$.

Важнейшим частным случаем неравномерного движения является *равноускоренное* движение, при котором остаются постоянными модуль и направление вектора ускорения:

- равноускоренное движение $\Leftrightarrow \vec{a} = \text{const}$.

Наряду с материальной точкой в механике рассматривается ещё одна идеализация — твёрдое тело.

Твёрдое тело — это система материальных точек, расстояния между которыми не меняются со временем. Модель твёрдого тела применяется в тех случаях, когда мы не можем пренебречь размерами тела, но можем не принимать во внимание *изменение* размеров и формы тела в процессе движения.

Простейшими видами механического движения твёрдого тела являются поступательное и вращательное движения.

Движение тела называется *поступательным*, если всякая прямая, соединяющая две какие-либо точки тела, перемещается параллельно своему первоначальному направлению. При поступательном движении траектории всех точек тела идентичны: они получаются друг из друга параллельным сдвигом.

Так, на рис. 12 показано поступательное движение серого квадрата. Произвольно взятый зелёный отрезок этого квадрата перемещается параллельно самому себе. Траектории концов отрезка изображены синими пунктирными линиями.

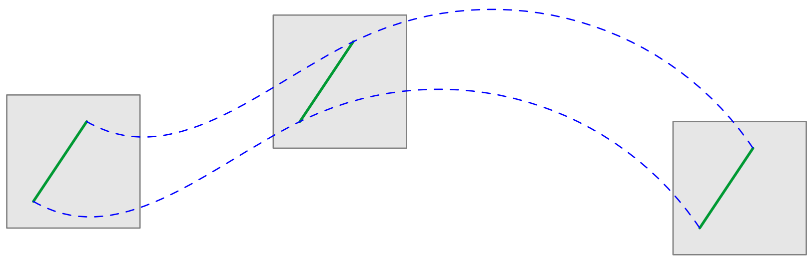

Рис. 12. Поступательное движение

Движение тела называется *вращательным*, если все его точки описывают окружности, лежащие в параллельных плоскостях. При этом центры данных окружностей лежат на одной прямой, которая перпендикулярна всем этим плоскостям и называется *осью вращения*.

На рис. 13 изображён шар, вращающийся вокруг вертикальной оси. Так обычно рисуют земной шар в соответствующих задачах динамики.

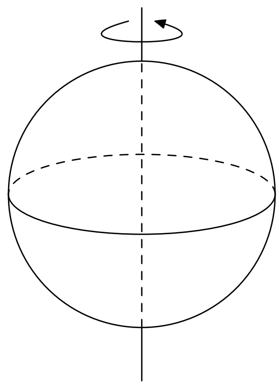

Рис. 13. Вращательное движение

3 Равномерное прямолинейное движение

Равномерное прямолинейное движение материальной точки — это движение с постоянной скоростью $\vec{v}$. Обратите внимание, что речь идёт о постоянстве *вектора* скорости; это значит, что скорость неизменна как по модулю, так и по направлению.

Траекторией тела при равномерном прямолинейном движении служит прямая (или часть прямой — например, отрезок или луч). Вдоль данной прямой тело движется равномерно, то есть с постоянной по модулю скоростью.

3.1 Закон движения

Предположим, что тело, двигаясь равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}$, переместилось за время t из точки M_0 в точку M (рис. 14). Вектор перемещения есть $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M}$.

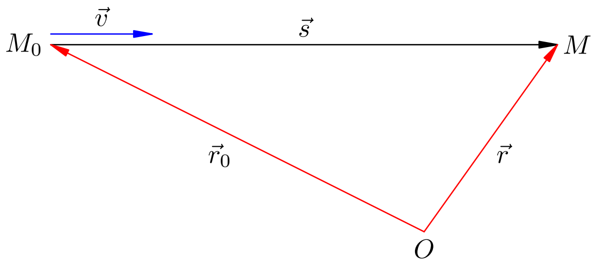

Рис. 14. Равномерное прямолинейное движение

Путь, пройденный телом, равен длине s вектора перемещения. Очевидно, что выполнено соотношение:

$$s = vt, \tag{29}$$

где v — модуль вектора скорости.

Формула (29) справедлива для произвольного равномерного движения (не обязательно прямолинейного). Но в случае прямолинейного равномерного движения эта формула становится соотношением между векторами. В самом деле, поскольку векторы $\vec{s}$ и $\vec{v}$ сонаправлены, формула (29) позволяет записать:

$$\vec{s} = \vec{v}t. \tag{30}$$

Как обычно, движение тела рассматривается в некоторой системе отсчёта, связанной с телом отсчёта O (рис. 14; координатные оси не изображаем). Пусть $\vec{r}_0$ — радиус-вектор начальной точки M_0 и $\vec{r}$ — радиус-вектор конечной точки M. Тогда, очевидно,

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

Подставим эту разность в формулу (30):

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}t.$$

Отсюда получаем *закон движения* (то есть зависимость радиус-вектора тела от времени):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \tag{31}$$

Напомним, что нахождение закона движения решает основную задачу механики, которая заключается в определении зависимости координат тела от времени. Переход от векторного соотношения (31) к координатам осуществляется элементарно.

Координаты точки M_0 обозначим (x_0, y_0, z_0). Они же являются координатами вектора $\vec{r}_0$. Координаты точки M (и вектора $\vec{r}$) обозначим (x, y, z). Тогда векторная формула (31) приводит к трём координатным соотношениям:

$$x = x_0 + v_x t, \tag{32}$$

$$y = y_0 + v_y t, \tag{33}$$

$$z = z_0 + v_z t. \tag{34}$$

Формулы (32)—(34), представляя координаты тела как функции времени, служат решением основной задачи механики для равномерного прямолинейного движения.

3.2 Интегрирование

Ключевая формула (31), описывающая равномерное прямолинейное движение, может быть получена из несколько иных соображений. Вспомним, что производная радиус-вектора есть скорость точки:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \tag{35}$$

В случае равномерного прямолинейного движения имеем $\vec{v} = \mathrm{const}$. Что нужно продифференцировать, чтобы получить постоянный вектор $\vec{v}$? Очевидно, функцию $\vec{v}t$. Но не только: к величине $\vec{v}t$ можно прибавить любой постоянный вектор $\vec{c}$ (это не изменит производную, поскольку производная константы равна нулю). Таким образом:

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{v}t. \tag{36}$$

Каков смысл константы $\vec{c}$? Если $t = 0$, то радиус-вектор $\vec{r}$ равен своему начальному значению $\vec{r}_0$. Поэтому, полагая $t = 0$ в формуле (36), получим:

$$\vec{r}_0 = \vec{c}.$$

Итак, вектор $\vec{c}$ есть начальное значение радиус-вектора, и теперь из (36) мы снова приходим к формуле (31):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t.$$

Мы, таким образом, *проинтегрировали* равенство (35) при условии, что $\vec{v} = \mathrm{const}$. Интегрирование — это операция, обратная дифференцированию. Проинтегрировать — значит найти неизвестную функцию, если дана её производная.

Интегрировать в физике приходится очень часто. Например, закон движения определяется с помощью интегрирования. Вы только что убедились в этом; впоследствии у нас возникнут и другие примеры.

4 Равноускоренное движение

Равноускоренное движение — это движение с постоянным вектором ускорения $\vec{a}$. Таким образом, при равноускоренном движении остаются неизменными направление и абсолютная величина ускорения.

4.1 Зависимость скорости от времени

При изучении равномерного прямолинейного движения вопрос зависимости скорости от времени не возникал: скорость была постоянна в процессе движения. Однако при равноускоренном движении скорость меняется с течением времени, и эту зависимость нам предстоит выяснить.

Давайте ещё раз потренируемся в элементарном интегрировании. Исходим из того, что производная вектора скорости есть вектор ускорения:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \tag{37}$$

В нашем случае имеем $\vec{a} = \text{const}$. Что надо продифференцировать, чтобы получить постоянный вектор $\vec{a}$? Разумеется, функцию $\vec{a}t$. Но не только: к ней можно добавить ещё произвольный постоянный вектор $\vec{c}$ (ведь производная постоянного вектора равна нулю). Таким образом,

$$\vec{v} = \vec{c} + \vec{a}t. \tag{38}$$

Каков смысл константы $\vec{c}$? В начальный момент времени $t = 0$ скорость равна своему начальному значению: $\vec{v} = \vec{v}_0$. Поэтому, полагая $t = 0$ в формуле (38), получим:

$$\vec{v}_0 = \vec{c}.$$

Итак, константа $\vec{c}$ — это начальная скорость тела. Теперь соотношение (38) принимает свой окончательный вид:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{39}$$

В конкретных задачах мы выбираем систему координат и переходим к проекциям на координатные оси. Так, в прямоугольной декартовой системе координат $OXYZ$ векторное соотношение (39) даёт три скалярных равенства:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ v_y &= v_{0y} + a_y t, \\ v_z &= v_{0z} + a_z t. \end{aligned}$$

4.2 Закон движения

Теперь мы можем найти закон движения, то есть зависимость радиус-вектора от времени. Вспоминаем, что производная радиус-вектора есть скорость тела:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Подставляем сюда выражение для скорости, даваемое формулой (39):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{40}$$

Сейчас нам предстоит проинтегрировать равенство (40). Это несложно. Чтобы получить $\vec{v}_0$, надо продифференцировать функцию $\vec{v}_0 t$. Чтобы получить $\vec{a}t$, нужно продифференцировать выражение $\vec{a}t^2/2$. Не забудем добавить и произвольную константу $\vec{c}$:

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,.$$

Ясно, что $\vec{c}$ — это начальное значение $\vec{r}_0$ радиус-вектора $\vec{r}$ в момент времени $t = 0$. В результате получаем искомый закон равноускоренного движения:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,. \tag{41}$$

Переходя к проекциям на координатные оси, вместо одного векторного равенства (41) получаем три скалярных равенства:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,, \tag{42}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\,, \tag{43}$$

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}\,. \tag{44}$$

Формулы (42)—(44) дают зависимость координат тела от времени и поэтому служат решением основной задачи механики для равноускоренного движения.

Снова вернёмся к закону движения (41). Заметим, что $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}$ — перемещение тела. Тогда получаем зависимость перемещения от времени:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,.$$

4.3 Прямолинейное равноускоренное движение

Если равноускоренное движение является прямолинейным, то удобно выбрать координатную ось вдоль прямой, по которой движется тело. Пусть, например, это будет ось OX. Тогда для решения задач нам достаточно будет трёх формул:

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,,$$

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,,$$

где $s_x = x - x_0$ — проекция перемещения на ось OX.

Но очень часто помогает ещё одна формула, являющаяся их следствием. Выразим из первой формулы время:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

и подставим в формулу для перемещения:

$$s_x = v_{0x}\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} + \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2.$$

Преобразуем:

$$s_x = \frac{v_{0x}v_x - v_{0x}^2}{a_x} + \frac{v_x^2 - 2v_x v_{0x} + v_{0x}^2}{2a_x}\,,$$

и окончательно получаем:

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}\,.$$

Эта формула не содержит времени t и позволяет быстрее приходить к ответу в тех задачах, где время не фигурирует.

4.4 Свободное падение

Важным частным случаем равноускоренного движения является *свободное падение*. Так называется движение тела вблизи поверхности Земли без учёта сопротивления воздуха.

Свободное падение тела, независимо от его массы, происходит с постоянным *ускорением свободного падения* $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Почти во всех задачах при расчётах полагают $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Давайте разберём несколько задач и посмотрим, как работают выведенные нами формулы для равноускоренного движения.

Задача. Найти скорость приземления дождевой капли, если высота тучи $h = 2$ км.

Решение. Направим ось OY вертикально вниз, расположив начало отсчёта в точке отрыва капли. Воспользуемся формулой

$$s_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y}\,.$$

Имеем: $s_y = h$, $v_y = v$ — искомая скорость приземления, $v_{0y} = 0$, $a_y = g$. Получаем: $h = \dfrac{v^2}{2g}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Вычисляем: $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2000} = 200\,\text{м/с}$. Это 720 км/ч, порядка скорости пули.

На самом деле капли дождя падают со скоростью порядка нескольких метров в секунду. Почему такое расхождение? Сопротивление воздуха!

Задача. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Найти его скорость через $t = 5$ с.

Решение. Направим ось OY вертикально вверх, поместив начало отсчёта на поверхности Земли. Используем формулу

$$v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Здесь $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, так что $v_y = v_0 - gt$. Вычисляем: $v_y = 30 - 10 \cdot 5 = -20$ м/с. Значит, скорость будет равна 20 м/с. Знак проекции указывает на то, что тело будет лететь вниз.

Задача. С балкона, находящегося на высоте $h = 15$ м, бросили вертикально вверх камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время камень упадёт на землю?

Решение. Направим ось OY вертикально вверх, поместив начало отсчёта на поверхности Земли. Берём формулу

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\,.$$

Имеем: $y = 0$, $y_0 = h$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, так что $0 = h + v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} = 15 + 10t - 5t^2$, или $t^2 - 2t - 3 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $t = 3$ с.

4.5 Горизонтальный бросок

Равноускоренное движение не обязательно является прямолинейным. Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально.

Предположим, что тело брошено горизонтально со скоростью v_0 с высоты h. Найдём время и дальность полёта, а также выясним, по какой траектории происходит движение.

Выберем систему координат OXY так, как показано на рис. 15.

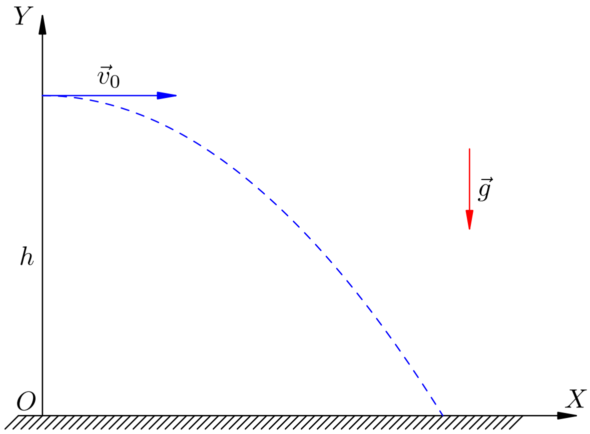

Рис. 15. Горизонтальный бросок

Используем формулы:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В нашем случае $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = 0$, $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$, $a_y = -g$. Получаем:

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{45}$$

Время полёта T найдём из условия, что в момент падения координата тела y обращается в нуль:

$$y(T) = 0 \Rightarrow h - \frac{gT^2}{2} = 0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Дальность полёта L — это значение координаты x в момент времени T:

$$L = x(T) = v_0 T = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Уравнение траектории получим, исключая время из уравнений (45). Выражаем t из первого уравнения и подставляем во второе:

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow$$
$$y = h - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Получили зависимость y от x, которая является уравнением параболы. Следовательно, тело летит по параболе.

4.6 Бросок под углом к горизонту

Рассмотрим несколько более сложный случай равноускоренного движения: полёт тела, брошенного под углом к горизонту.

Предположим, что тело брошено с поверхности Земли со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту. Найдём время и дальность полёта, а также выясним, по какой траектории двигается тело.

Выберем систему координат OXY так, как показано на рис. 16.

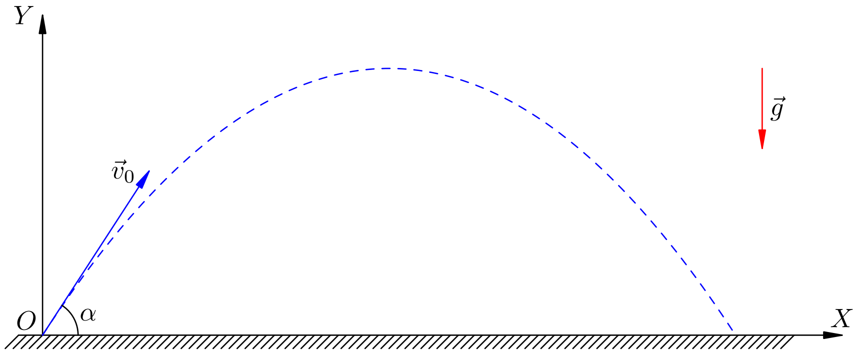

Рис. 16. Бросок под углом к горизонту

Начинаем с уравнений:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В нашем случае $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, $a_x = 0$, $a_y = -g$. Получаем:

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Дальше действуем так же, как и в случае горизонтального броска. В результате приходим к соотношениям:

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

(Обязательно проделайте эти вычисления самостоятельно!) Как видим, зависимость y от x снова является уравнением параболы.

Попробуйте также показать, что максимальная высота подъёма определяется формулой:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

5 Равномерное движение по окружности

Равномерное движение по окружности — это достаточно простой пример движения с вектором ускорения, зависящим от времени.

Пусть точка вращается по окружности радиуса r. Скорость точки постоянна по модулю и равна v. Скорость v называется *линейной скоростью* точки.

Период обращения — это время одного полного оборота. Для периода T имеем очевидную формулу:

$$T = \frac{2\pi r}{v}\,. \tag{46}$$

Частота обращения — это величина, обратная периоду:

$$\nu = \frac{1}{T}\,.$$

Частота показывает, сколько полных оборотов точка совершает за секунду. Измеряется частота в об/с (обороты в секунду).

Пусть, например, $T = 0{,}1$ с. Это означает, что за время $0{,}1$ с точка совершает один полный оборот. Частота при этом равна: $\nu = 1/0{,}1 = 10$ об/с; за секунду точка совершает 10 полных оборотов.

5.1 Угловая скорость

Рассмотрим равномерное вращение точки в декартовой системе координат. Поместим начало координат O в центре окружности (рис. 17).

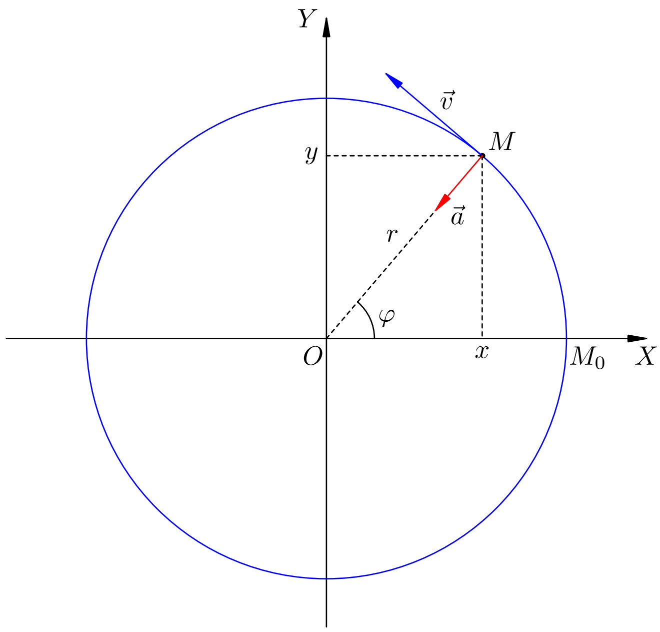

Рис. 17. Равномерное движение по окружности

Пусть M_0 — начальное положение точки; иными словами, при $t = 0$ точка имела координаты $(r, 0)$. Пусть за время t точка повернулась на угол φ и заняла положение M.

Отношение угла поворота ко времени называется *угловой скоростью* вращения точки:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}\,. \tag{47}$$

Угол φ, как правило, измеряется в радианах, поэтому угловая скорость измеряется в рад/с.

За время, равное периоду вращения, точка поворачивается на угол 2π. Поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{48}$$

Сопоставляя формулы (46) и (48), получаем связь линейной и угловой скоростей:

$$v = \omega r. \tag{49}$$

5.2 Закон движения

Найдём теперь зависимость координат вращающейся точки от времени. Видим из рис. 17, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Но из формулы (47) имеем: $\varphi = \omega t$. Следовательно,

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t. \tag{50}$$

Формулы (50) являются решением основной задачи механики для равномерного движения точки по окружности.

5.3 Центростремительное ускорение

Теперь нас интересует ускорение вращающейся точки. Его можно найти, дважды продифференцировав соотношения (50):

$$\begin{gathered} v_x = \dot{x} = -\omega r\sin\omega t, \quad v_y = \dot{y} = \omega r\cos\omega t, \\ a_x = \dot{v}_x = -\omega^2 r\cos\omega t, \quad a_y = \dot{v}_y = -\omega^2 r\sin\omega t. \end{gathered}$$

С учётом формул (50) имеем:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad a_y = -\omega^2 y. \tag{51}$$

Полученные формулы (51) можно записать в виде одного векторного равенства:

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}, \tag{52}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор вращающейся точки.

Мы видим, что вектор ускорения направлен противоположно радиус-вектору, т. е. к центру окружности (см. рис. 17). Поэтому ускорение точки, равномерно движущейся по окружности, называется *центростремительным*.

Кроме того, из формулы (52) мы получаем выражение для модуля центростремительного ускорения:

$$a = \omega^2 r. \tag{53}$$

Выразим угловую скорость из (49):

$$\omega = \frac{v}{r}$$

и подставим в (53). Получим ещё одну формулу для центростремительного ускорения:

$$a = \frac{v^2}{r}\,.$$

6 Путь при неравномерном движении

Сейчас мы будем рассматривать *неравномерное* движение — то есть движение, при котором абсолютная величина скорости меняется со временем. Оказывается, существует простая геометрическая интерпретация пути, пройденного телом при произвольном движении.

Начнём с равномерного движения. Пусть скорость тела постоянна и равна v. Возьмём два момента времени: начальный момент t_1 и конечный момент t_2. Длительность рассматриваемого промежутка времени равна $\Delta t = t_2 - t_1$.

Очевидно, что за промежуток времени $[t_1, t_2]$ тело проходит путь:

$$s = v(t_2 - t_1) = v\Delta t. \tag{54}$$

Давайте построим график зависимости скорости от времени. В данном случае это будет прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 18).

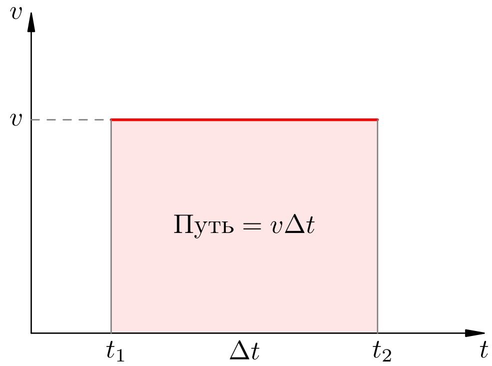

Рис. 18. Путь при равномерном движении

Нетрудно видеть, что *пройденный путь равен площади прямоугольника, расположенного под графиком скорости.* В самом деле, первый множитель v в формуле (54) есть вертикальная сторона этого прямоугольника, а второй множитель Δt — его горизонтальная сторона.

Теперь нам предстоит обобщить эту геометрическую интерпретацию на случай неравномерного движения.

Пусть скорость тела v зависит от времени, и на рассматриваемом промежутке $[t_1, t_2]$ график скорости выглядит, например, так (рис. 19):

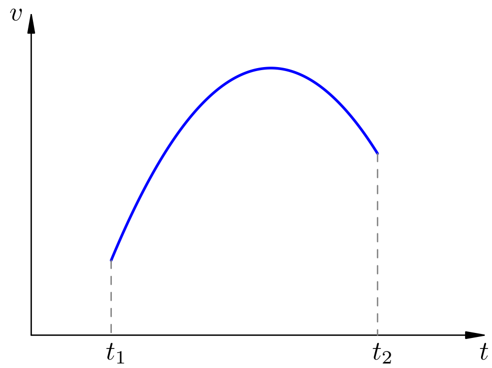

Рис. 19. Неравномерное движение

Дальше мы рассуждаем следующим образом.

1. Разобьём наш промежуток времени $[t_1, t_2]$ на небольшие отрезки величиной Δt.

2. Предположим, что на каждом таком отрезке тело движется с *постоянной* скоростью. То есть, плавное изменение скорости заменим ступенчатой аппроксимацией[3]: в течение каждого небольшого отрезка времени тело движется равномерно, а затем скорость тела мгновенно и скачком меняется.

   На рис. 20 показаны две ступенчатые аппроксимации. Ширина ступенек Δt на правом рисунке вдвое меньше, чем на левом.

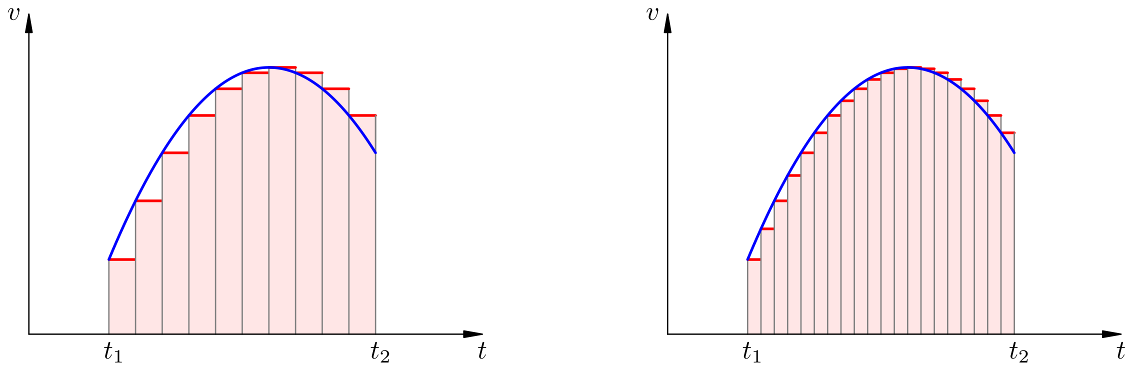

Рис. 20. Ступенчатая аппроксимация

   Путь, пройденный за время Δt равномерного движения — это площадь прямоугольника, расположенного под ступенькой. Поэтому путь, пройденный за всё время такого «ступенчатого» движения — это сумма площадей всех прямоугольников на графике.

3. Теперь устремляем Δt к нулю. Ясно, что в пределе наша ступенчатая аппроксимация перейдёт в исходный график скорости на рис. 19. Сумма площадей прямоугольников перейдёт в площадь под графиком скорости; следовательно, эта площадь и есть путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2 (рис. 21).

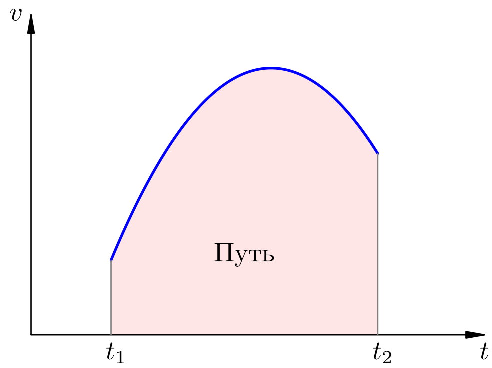

Рис. 21. Путь при неравномерном движении

В итоге мы приходим к нужному нам обобщению геометрической интерпретации пути, полученной выше для случая равномерного движения.

Геометрическая интерпретация пути. Путь, пройденный телом при любом движении, равен площади под графиком скорости на заданном промежутке времени.

Посмотрим, как работает эта геометрическая интерпретация в важном частном случае равноускоренного движения.

[3] *Аппроксимация* — это приближённая замена достаточно сложного объекта более простой моделью, которую удобнее изучать.

Задача. Тело, имеющее скорость v_0 в начальный момент $t = 0$, разгоняется с постоянным ускорением a. Найти путь, пройденный телом к моменту времени t.

Решение. Зависимость скорости от времени в данном случае имеет вид:

$$v = v_0 + at. \tag{55}$$

График скорости — прямая, изображённая на рис. 22. Искомый путь есть площадь трапеции, расположенной под графиком скорости.

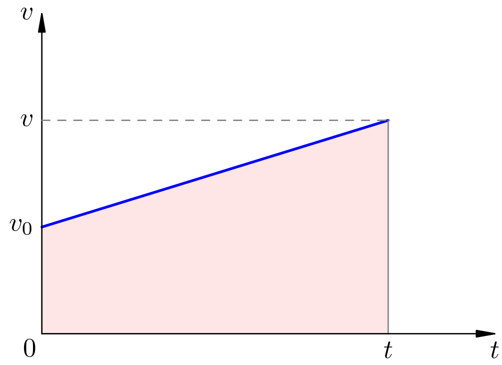

Рис. 22. Путь при равноускоренном движении

Меньшее основание трапеции равно v_0. Большее основание равно $v = v_0 + at$. Высота трапеции равна t. Поскольку площадь трапеции есть произведение полусуммы оснований на высоту, имеем:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + at}{2} \cdot t = \frac{2v_0 t + at^2}{2}\,.$$

Эту формулу можно переписать в более привычном виде:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}\,.$$

Она, разумеется, вам хорошо известна из темы «Равноускоренное движение».

Задача. График скорости тела является полуокружностью диаметра τ (рис. 23). Максимальная скорость тела равна v. Найти путь, пройденный телом за время τ.

Решение. Как вы знаете, площадь круга радиуса R равна πR^2. Но в данной задаче необходимо учесть, что радиусы полуокружности имеют разные размерности: горизонтальный радиус есть время $\tau/2$, а вертикальный радиус есть скорость v.

Поэтому пройденный путь, вычисляемый как площадь полукруга, равен половине произведения π на горизонтальный радиус и на вертикальный радиус:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\tau}{2} \cdot v = \frac{\pi v \tau}{4}\,.$$

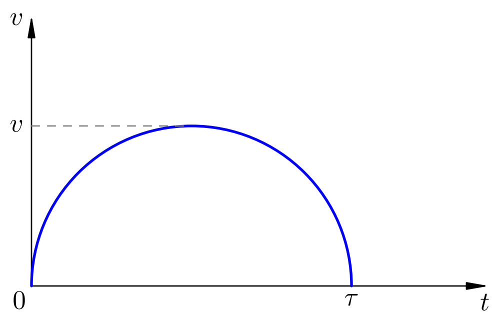

Рис. 23. К задаче

7 Первый закон Ньютона

Все тела в природе взаимодействуют друг с другом. Однако в некоторых ситуациях воздействия на данное тело со стороны других тел можно не принимать во внимание.

Так, космический корабль в далёком межзвёздном пространстве практически не испытывает гравитационного притяжения объектов Вселенной из-за их колоссальной удалённости[4]. Лежащий на столе карандаш притягивается к Земле, но действие Земли компенсируется упругой реакцией стола, и поэтому карандаш находится в покое, словно никакие силы на него вообще не действуют.

Во всех подобных случаях будем называть тело свободным.

Тело называется свободным, если действия на него со стороны других тел или пренебрежимо малы, или компенсируют друг друга.

7.1 Инерциальные системы отсчёта

Повседневный опыт говорит о том, что свободные тела покоятся — как упомянутый карандаш на столе. Поэтому долгое время считалось, что для поддержания какого бы то ни было движения необходимо осуществлять нескомпенсированное внешнее воздействие со стороны других тел.

Но это оказалось неверным. Как установил Галилей, свободное тело может не только находиться в покое, но и двигаться равномерно и прямолинейно! Именно состояние равномерного прямолинейного движения является «естественным» для свободного тела; покой же — частный случай такого движения со скоростью, равной нулю.

Следует учесть, однако, что движение относительно: оно рассматривается не само по себе, а в определённой системе отсчёта. В различных же системах отсчёта движение данного тела будет выглядеть по-разному.

Так, дом с точки зрения неподвижно стоящего наблюдателя будет находиться в покое: сила притяжения дома к Земле компенсируется силой упругости почвы. Если наблюдатель движется относительно земли равномерно и прямолинейно, то и дом относительно наблюдателя будет совершать равномерное прямолинейное движение в полном соответствии с выводами Галилея — ведь дом является свободным телом!

Но если у наблюдателя заплетаются ноги и он бредёт, шатаясь, то ему будет казаться, что дом раскачивается в разные стороны. В этой системе отсчёта дом, будучи свободным телом, совершает отнюдь не равномерное и прямолинейное движение.

Таким образом, утверждение Галилея верно не во всей общности: *не во всякой* системе отсчёта свободное тело движется равномерно и прямолинейно. Но всё же такие системы отсчёта существуют (существуют «хорошие» наблюдатели!), и в этом состоит первый закон Ньютона.

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчёта, относительно которых свободное тело движется равномерно и прямолинейно.

Свойство свободного тела сохранять скорость неизменной называется *инерцией*. Поэтому первый закон Ньютона называют ещё *законом инерции*. Равномерное прямолинейное движение свободного тела называется *движением по инерции*.

Система отсчёта, относительно которой свободное тело движется равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной*. Первый закон Ньютона — это постулат[5] о *существовании*

[4]Согласно закону всемирного тяготения гравитационные силы обратно пропорциональны квадрату расстояния между телами.

[5]*Постулат* — первичное утверждение физики, не выводимое из каких-либо иных утверждений. Постулат есть констатация факта: *таким вот образом ведёт себя природа*. Сформулировать тот или иной постулат можно лишь на основании наблюдений и физических экспериментов.

инерциальных систем отсчёта. В инерциальных системах отсчёта механические явления описываются наиболее просто.

В действительности инерциальных систем отсчёта существует бесконечно много: всякая система отсчёта, которая движется относительно инерциальной системы равномерно и прямолинейно, сама является инерциальной.

Система отсчёта, которая движется относительно инерциальной системы отсчёта с ускорением, является *неинерциальной*. В такой «плохой» системе отсчёта свободное тело будет двигаться с ускорением, что усложнит описание его движения.

С достаточно высокой точностью можно считать инерциальной *гелиоцентрическую* систему (систему Коперника). Это система отсчёта, начало которой помещено в центре Солнца, а координатные оси направлены на три какие-либо удалённые звезды, которые можно принять за неподвижные.

Инерциальной часто можно считать систему отсчёта, связанную с земной поверхностью. Это, однако, более грубое приближение — ведь мы тем самым отвлекаемся от вращения Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца. Так, звезда, неподвижная в системе Коперника, в земной системе будет совершать сложное движение в виде наложения двух вращений (суточного и годового). Однако в большинстве явлений, происходящих на поверхности Земли, неинерциальность земной системы отсчёта практически никак не сказывается, и ею можно пренебречь.

7.2 Принцип относительности

Галилей заметил, что, находясь в трюме корабля, никакими механическими опытами невозможно установить, покоится ли корабль или движется равномерно и прямолинейно. Это означает, что инерциальные системы отсчёта совершенно неотличимы друг от друга с точки зрения законов механики. Иными словами, верен принцип относительности Галилея.

Принцип относительности Галилея. Всякое механическое явление при одних и тех же начальных условиях протекает одинаково в любой инерциальной системе отсчёта.

Впоследствии Эйнштейн распространил этот принцип с механических явлений на вообще все физические явления. Общий принцип относительности Эйнштейна лёг в основу теории относительности.

Принцип относительности Галилея и Эйнштейна мы обсудим подробнее при изучении основ специальной теории относительности.

8 Масса и плотность

Масса — фундаментальная физическая величина. Масса характеризует сразу несколько свойств тела и сама по себе обладает рядом важных свойств.

1. Масса служит мерой содержащегося в теле вещества.

2. Масса является мерой инертности тела. *Инертностью* называется свойство тела сохранять свою скорость неизменной (в инерциальной системе отсчёта), когда внешние воздействия отсутствуют или компенсируют друг друга.

   При наличии внешних воздействий инертность тела проявляется в том, что его скорость меняется не мгновенно, а постепенно, и тем медленнее, чем больше инертность (т. е. масса) тела. Например, если бильярдный шар и автобус движутся с одинаковой скоростью и тормозятся одинаковым усилием, то для остановки шара требуется гораздо меньше времени, чем для остановки автобуса.

3. Массы тел являются причиной их гравитационного притяжения друг к другу (см. раздел «Сила тяготения»).

4. Масса тела равна сумме масс его частей. Это так называемая *аддитивность* массы. Аддитивность позволяет использовать для измерения массы эталон — 1 кг.

5. Масса изолированной системы тел не меняется со временем (*закон сохранения массы*).

6. Масса тела не зависит от скорости его движения. Масса не меняется при переходе от одной системы отсчёта к другой.

Плотностью однородного тела называется отношение массы тела к его объёму:

$$\rho = \frac{m}{V}\,.$$

Плотность не зависит от геометрических свойств тела (формы, объёма) и является характеристикой вещества тела. Плотности различных веществ представлены в справочных таблицах. Желательно помнить плотность воды: 1000 кг/м^3.

9 Второй и третий законы Ньютона

Взаимодействие тел можно описывать с помощью понятия силы. *Сила* — это векторная величина, являющаяся мерой воздействия одного тела на другое.

Будучи вектором, сила характеризуется модулем (абсолютной величиной) и направлением в пространстве. Кроме того, важна точка приложения силы: одна и та же по модулю и направлению сила, приложенная в разных точках тела, может оказывать различное воздействие. Так, если взяться за обод велосипедного колеса и потянуть по касательной к ободу, то колесо начнёт вращаться. Если же тянуть вдоль радиуса, никакого вращения не будет.

9.1 Принцип суперпозиции

Опыт показывает, что если на данное тело действуют несколько других тел, то соответствующие силы складываются как векторы. Более точно, справедлив принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции сил. *Пусть на тело действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Если заменить их одной силой $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$, то результат воздействия не изменится.*

Сила $\vec{F}$ называется *равнодействующей* сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ или *результирующей* силой.

9.2 Второй закон Ньютона

Если равнодействующая сил, приложенных к телу, равна нулю (то есть воздействия других тел компенсируют друг друга), то в силу первого закона Ньютона найдутся такие системы отсчёта (называемые инерциальными), в которых движение тела будет равномерным и прямолинейным. Но если равнодействующая не обращается в нуль, то в инерциальной системе отсчёта у тела появится ускорение.

Количественную связь между ускорением и силой даёт второй закон Ньютона.

Второй закон Ньютона. *Произведение массы тела на вектор ускорения есть равнодействующая всех сил, приложенных к телу*: $m\vec{a} = \vec{F}$.

Подчеркнём, что второй закон Ньютона связывает *векторы* ускорения и силы. Это означает, что справедливы следующие утверждения.

1. $ma = F$, где a — модуль ускорения, F — модуль равнодействующей силы.

2. Вектор ускорения сонаправлен с вектором равнодействующей силы, так как масса тела положительна.

Например, если тело равномерно движется по окружности, то его ускорение направлено к центру окружности. Стало быть, к центру окружности направлена и равнодействующая всех сил, приложенных к телу.

Второй закон Ньютона справедлив не в любой системе отсчёта. Вспомним шатающегося наблюдателя (раздел «Первый закон Ньютона»): относительно него дом движется с ускорением, хотя равнодействующая всех сил, приложенных к дому, равна нулю. Второй закон Ньютона выполняется лишь в инерциальных системах отсчёта, факт существования которых устанавливается первым законом Ньютона.

9.3 Третий закон Ньютона

Опыт показывает, что если тело A действует на тело B, то и тело B действует на тело A. Количественную связь между действиями тел друг на друга даёт третий закон Ньютона («действие равно противодействию»).

Третий закон Ньютона. *Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению. Эти силы имеют одну и ту же физическую природу и направлены вдоль прямой, соединяющей их точки приложения.*

Например, если карандаш действует на стол с силой $\vec{P}$, направленной вниз, то стол действует на карандаш с силой $\vec{N}$, направленной вверх (рис. 24). Эти силы равны по абсолютной величине.

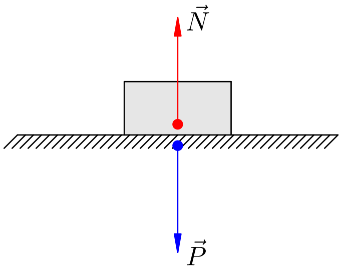

Рис. 24. $\vec{P} = -\vec{N}$

Силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$, как видим, приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга (нет смысла говорить об их равнодействующей).

Третий закон Ньютона, как и второй, справедлив только в инерциальных системах отсчёта.

9.4 Как найти закон движения?

Законы Ньютона позволяют решить основную задачу механики — найти закон движения тела. В общих чертах схема действий такова.

1. Записываем второй закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}$. С учётом того, что ускорение есть вторая производная радиус-вектора, второй закон Ньютона приобретает вид:

   $$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \tag{56}$$

   Необходимо также добавить *начальные условия*: в начальный момент времени $t = 0$ имеем $\vec{r} = \vec{r}_0$ и $\vec{v} = \vec{v}_0$. Начальные значения радиус-вектора и скорости тела предполагаются известными — иначе движение тела нельзя будет описать однозначно.

   Разумеется, должна быть известна и правая часть равенства (56) — равнодействующая $\vec{F}$ всех сил, приложенных к телу.

2. Второй закон Ньютона в виде (56) является *дифференциальным уравнением*. Это уравнение нужно *проинтегрировать*, то есть найти неизвестную функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$ по известной второй производной этой функции. Выполнив интегрирование, мы и определим закон движения.

Однако легко сказать — «выполнив интегрирование». Сила $\vec{F}$ может зависеть от координат и скорости тела, а также от времени, вследствие чего интегрирование дифференциального уравнения (56) окажется весьма сложной задачей. Во многих практических ситуациях такая задача доступна лишь компьютеру.

Вот почему центральное место в школьной механике занимает равноускоренное движение: оно происходит под действием *постоянной* силы, и в этом простейшем случае уравнение (56) интегрируется элементарно. Имеем:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a},$$

где $\vec{a}$ — постоянный вектор. Интегрируя один раз, с учётом начальных условий получим:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Теперь интегрируем второй раз:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,.$$

Получился уже известный вам закон равноускоренного движения.

Механика, основанная на законах Ньютона, называется *классической механикой*. Классическая механика, однако, имеет ограниченную область применимости. В рамках классической механики хорошо описывается движение *не очень маленьких тел с не очень большими скоростями*. При описании атомов и элементарных частиц на замену классической механике приходит *квантовая механика*. Движение объектов со скоростями, близкими к скорости света, происходит по законам *теории относительности*.

10 Сила упругости

Как мы знаем, в правой части второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ стоит равнодействующая (то есть векторная сумма) всех сил, приложенных к телу. Теперь нам предстоит изучить силы взаимодействия тел в механике. Их три вида: сила упругости, гравитационная сила и сила трения. Начинаем с силы упругости.

10.1 Деформация

Силы упругости возникают при деформациях тел. *Деформация* — это изменение формы и размеров тела. К деформациям относятся растяжение, сжатие, кручение, сдвиг и изгиб.

Деформации бывают упругими и пластическими.

Упругая деформация полностью исчезает после снятия внешнего воздействия, которое вызвало деформацию. В результате деформированное поначалу тело восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Пластическая деформация сохраняется (быть может, частично) после снятия внешней нагрузки, и тело уже не возвращается к прежним размерам и форме.

Частицы тела (молекулы или атомы) взаимодействуют друг с другом силами притяжения и отталкивания, имеющими электромагнитное происхождение (это силы, действующие между ядрами и электронами соседних атомов). Силы взаимодействия зависят от расстояний между частицами. Если деформации нет, то силы притяжения компенсируются силами отталкивания. При деформации изменяются расстояния между частицами, и баланс сил взаимодействия нарушается.

Например, при растяжении стержня расстояния между его частицами увеличиваются, и начинают преобладать силы притяжения. Наоборот, при сжатии стержня расстояния между частицами уменьшаются, и начинают преобладать силы отталкивания. В любом случае возникает сила, которая направлена в сторону, противоположную деформации, и стремится восстановить первоначальную конфигурацию тела.

Сила упругости — это сила, возникающая при упругой деформации тела и направленная в сторону, противоположную смещению частиц тела в процессе деформации. Сила упругости:

1. действует между соседними слоями деформированного тела и приложена к каждому слою;
2. действует со стороны деформированного тела на соприкасающееся с ним тело, вызывающее деформацию, и приложена в месте контакта данных тел перпендикулярно их поверхностям (типичный пример — сила реакции опоры).

Силы, возникающие при пластических деформациях, не относятся к силам упругости. Эти силы зависят не от величины деформации, а от скорости её возникновения. Изучение таких сил выходит далеко за рамки школьной программы.

В школьной физике рассматриваются растяжения нитей и тросов, а также растяжения и сжатия пружин и стержней. Во всех этих случаях силы упругости направлены вдоль осей данных тел.

10.2 Закон Гука

Деформация называется *малой*, если изменение размеров тела много меньше его первоначальных размеров. При малых деформациях зависимость силы упругости от величины деформации оказывается линейной.

Закон Гука. Абсолютная величина силы упругости прямо пропорциональна величине деформации. В частности, для пружины, сжатой или растянутой на величину x, сила упругости даётся формулой:

$$F = kx, \tag{57}$$

где k — коэффициент жёсткости пружины.

Коэффициент жёсткости зависит не только от материала пружины, но также от её формы и размеров.

Из формулы (57) следует, что график зависимости силы упругости от (малой) деформации является прямой линией (рис. 25):

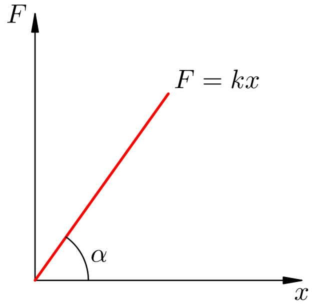

Рис. 25. Закон Гука

Коэффициент жёсткости k — это угловой коэффициент в уравнении прямой $F = kx$. Поэтому справедливо равенство:

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона данной прямой к оси абсцисс. Это равенство удобно использовать при экспериментальном нахождении величины k.

Подчеркнём ещё раз, что закон Гука о линейной зависимости силы упругости от величины деформации справедлив лишь при малых деформациях тела. Когда деформации перестают быть малыми, эта зависимость перестаёт быть линейной и приобретает более сложный вид. Соответственно, прямая линия на рис. 25 — это лишь небольшой начальный участок криволинейного графика, описывающего зависимость F от x при всех значениях деформации x.

10.3 Модуль Юнга

В частном случае малых деформаций *стержней* имеется более детальная формула, уточняющая общий вид (57) закона Гука.

Именно, если стержень длиной l и площадью поперечного сечения S растянуть или сжать на величину x, то для силы упругости справедлива формула:

$$F = ES\,\frac{x}{l}\,.$$

Здесь E — *модуль Юнга* материала стержня. Этот коэффициент уже не зависит от геометрических размеров стержня. Модули Юнга различных веществ приведены в справочных таблицах.

11 Сила тяготения

Любые два тела притягиваются друг к другу — по той лишь одной причине, что они имеют массу. Эта сила притяжения называется *силой тяготения* или *гравитационной силой*.

11.1 Закон всемирного тяготения

Гравитационное взаимодействие любых двух тел во Вселенной подчиняется достаточно простому закону.

Закон всемирного тяготения. Две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,. \tag{58}$$

Коэффициент пропорциональности G называется *гравитационной постоянной*. Это фундаментальная константа, и её численное значение было определено на основе эксперимента Генри Кавендиша:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}\,.$$

Порядок величины гравитационной постоянной объясняет, почему мы не замечаем взаимного притяжения окружающих нас предметов: гравитационные силы оказываются слишком малыми при небольших массах тел. Мы наблюдаем лишь притяжение предметов к Земле, масса которой грандиозна и равна примерно $6 \cdot 10^{24}$ кг.

Формула (58), будучи справедливой для материальных точек, перестаёт быть верной, если размерами тел пренебречь нельзя. Имеются, однако, два важных для практики исключения.

1. Формула (58) справедлива, если тела являются однородными шарами. Тогда r — расстояние между их центрами. Сила притяжения направлена вдоль прямой, соединяющей центры шаров.

2. Формула (58) справедлива, если одно из тел — однородный шар, а другое — материальная точка, находящаяся вне шара. Тогда r — расстояние от точки до центра шара. Сила притяжения направлена вдоль прямой, соединяющей точку с центром шара.

Второй случай особенно важен, так как позволяет применять формулу (58) для силы притяжения тела (например, искусственного спутника) к планете.

11.2 Сила тяжести

Предположим, что тело находится вблизи некоторой планеты. *Сила тяжести* — это сила гравитационного притяжения, действующая на тело со стороны планеты. В подавляющем большинстве случаев сила тяжести — это сила притяжения к Земле.

Пусть тело массы m лежит на поверхности Земли. На тело действует сила тяжести mg, где g — ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли. С другой стороны, считая Землю однородным шаром, можно выразить силу тяжести по закону всемирного тяготения:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}\,,$$

где M — масса Земли, $R \approx 6400$ км — радиус Земли. Отсюда получаем формулу для ускорения свободного падения на поверхности Земли:

$$g = G\frac{M}{R^2}\,. \tag{59}$$

Эта же формула, разумеется, позволяет найти ускорение свободного падения на поверхности любой планеты массы M и радиуса R.

Если тело находится на высоте h над поверхностью планеты, то для силы тяжести получаем:

$$mg(h) = G\frac{Mm}{(R+h)^2}\,.$$

Здесь $g(h)$ — ускорение свободного падения на высоте h:

$$g(h) = G\frac{M}{(R+h)^2} = \frac{gR^2}{(R+h)^2}\,.$$

В последнем равенстве мы воспользовались соотношением

$$GM = gR^2,$$

которое следует из формулы (59).

11.3 Вес тела. Невесомость

Рассмотрим тело, находящееся в поле силы тяжести. Предположим, что есть опора или подвес, препятствующие свободному падению тела. *Вес* тела — это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Подчеркнём, что вес приложен не к телу, а к опоре (подвесу).

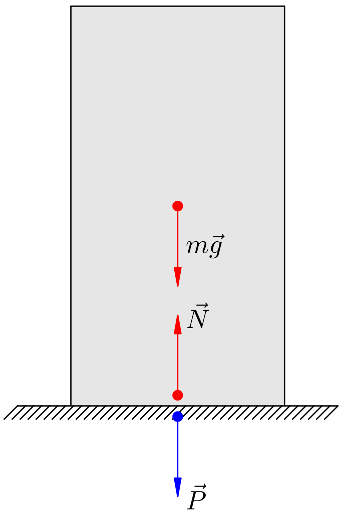

Рис. 26. Сила тяжести, реакция опоры и вес тела

На рис. 26 изображено тело на опоре. Со стороны Земли на тело действует сила тяжести $m\vec{g}$ (в случае однородного тела простой формы сила тяжести приложена в центре симметрии тела). Со стороны опоры на тело действует сила упругости $\vec{N}$ (так называемая реакция опоры). На опору со стороны тела действует сила $\vec{P}$ — вес тела. По третьему закону Ньютона силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ равны по модулю ($P = N$) и противоположны по направлению.

Предположим, что тело покоится. Тогда равнодействующая сил, приложенных к телу, равна нулю. Имеем:

$$m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} = -\vec{N} \Rightarrow mg = N.$$

С учётом равенства $N = P$ получаем $mg = P$. Стало быть, если тело покоится, то его вес равен по модулю силе тяжести.

Рассмотрим две стандартные задачи, которые обязательно нужно уметь решать.

Задача. Тело массы m вместе с опорой движется с ускорением a, направленным вертикально вверх. Найти вес тела.

Решение. Направим ось Y вертикально вверх (рис. 27).

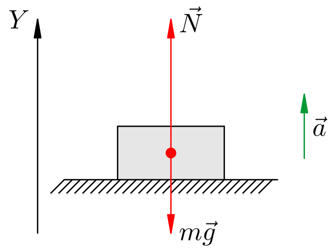

Рис. 27. Вес тела больше силы тяжести

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Перейдём к проекциям на ось Y:

$$ma = N - mg.$$

Отсюда $N = mg + ma = m(g + a)$. Следовательно, вес тела

$$P = m(g + a).$$

Как видим, вес тела больше силы тяжести. Такое состояние называется *перегрузкой*.

Задача. Тело массы m вместе с опорой движется с ускорением $a \leqslant g$, направленным вертикально вниз. Найти вес тела.

Решение. Направим ось Y вертикально вниз (рис. 28).

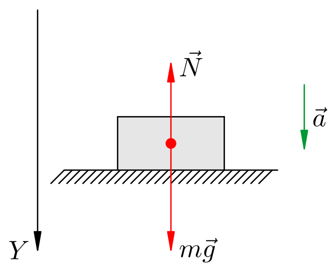

Рис. 28. Вес тела меньше силы тяжести

Схема решения та же. Начинаем со второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Переходим к проекциям на ось Y:

$$ma = mg - N.$$

Отсюда $N = mg - ma = m(g - a)$. Следовательно, вес тела

$$P = m(g - a).$$

В данном случае вес тела меньше силы тяжести. При $a = g$ (свободное падение тела с опорой) вес тела обращается в нуль. Это — состояние *невесомости*, при котором тело вообще не давит на опору.

11.4 Искусственные спутники

Для того, чтобы искусственный спутник мог совершать орбитальное движение вокруг планеты, ему нужно сообщить определённую скорость. Найдём скорость кругового движения спутника на высоте h над поверхностью планеты. Масса планеты M, её радиус R (рис. 29).

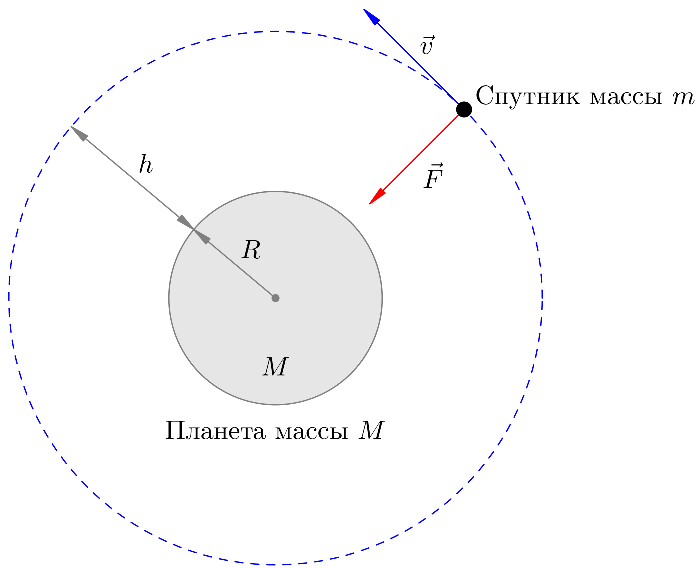

Рис. 29. Спутник на круговой орбите

Спутник будет двигаться под действием единственной силы $\vec{F}$ — силы всемирного тяготения, направленной к центру планеты. Туда же направлено и ускорение спутника — центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{R+h}\,.$$

Обозначив через m массу спутника, запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленной к центру планеты: $ma = F$, или

$$m\frac{v^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}\,.$$

Отсюда получаем выражение для скорости:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}\,.$$

Первая космическая скорость — это максимальная скорость кругового движения спутника, отвечающая высоте $h = 0$. Для первой космической скорости имеем:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,,$$

или, с учётом формулы (59),

$$v_1 = \sqrt{gR}\,.$$

Для Земли приближённо получаем:

$$v_1 = \sqrt{10 \cdot 6400000} = 8000 \text{ м/с} = 8 \text{ км/с}.$$

12 Сила трения

Сила трения — это сила взаимодействия между соприкасающимися телами, препятствующая перемещению одного тела относительно другого. Сила трения всегда направлена вдоль поверхностей соприкасающихся тел.

В школьной физике рассматриваются два вида трения.

1. *Сухое трение.* Оно возникает в зоне контакта поверхностей твёрдых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки.

2. *Вязкое трение.* Оно возникает при движении твёрдого тела в жидкой или газообразной среде или при перемещении одного слоя среды относительно другого.

Сухое и вязкое трение имеют разную природу и отличаются по свойствам. Рассмотрим эти виды трения по отдельности.

12.1 Сухое трение

Сухое трение может возникать даже при отсутствии относительного перемещения тел. Так, тяжёлый диван остаётся неподвижным при слабой попытке сдвинуть его с места: наша сила, приложенная к дивану, компенсируется силой трения, возникающей между диваном и полом. Сила трения, которая действует между поверхностями покоящихся тел и препятствует возникновению движения, называется *силой трения покоя*.

Почему вообще появляется сила трения покоя? Соприкасающиеся поверхности дивана и пола являются шероховатыми, они усеяны микроскопическими, незаметными глазу бугорками разных форм и размеров. Эти бугорки зацепляются друг за друга и не дают дивану начать движение. Сила трения покоя, таким образом, вызвана силами электромагнитного отталкивания молекул, возникающими при деформациях бугорков.

Будем плавно увеличивать силу F, приложенную к дивану. Как вам хорошо известно, до некоторого момента диван всё ещё не поддаётся и стоит на месте. Это означает, что *сила трения покоя f возрастает вместе с увеличением внешнего воздействия, оставаясь равной по модулю приложенной силе*: $f = F$ (рис. 30, участок OA). Причина возрастания силы трения понятна: увеличиваются деформации бугорков и возрастают силы отталкивания их молекул.

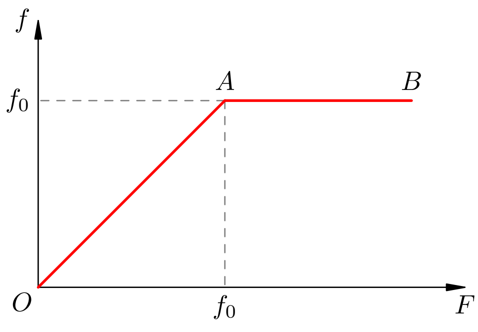

Рис. 30. Зависимость силы трения f от внешней силы F

Наконец, при определённой величине внешней силы диван сдвигается с места. Это означает, что *сила трения покоя достигает максимально возможного значения* f_0 (рис. 30, точка A). Деформации бугорков оказываются столь велики, что бугорки не выдерживают и начинают разрушаться. Возникает скольжение.

Сила трения, которая действует между проскальзывающими поверхностями, называется *силой трения скольжения*. В процессе скольжения рвутся связи между молекулами в зацепляющихся бугорках поверхностей. При трении покоя таких разрывов нет.

Сила трения скольжения уже не зависит от величины приложенной силы F и остаётся постоянной (рис. 30, горизонтальный участок AB). Сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя f_0.

Объяснение сухого трения в терминах бугорков является максимально простым и наглядным. Реальные механизмы трения куда сложнее, и их рассмотрение выходит за рамки элементарной физики.

Сила трения скольжения, приложенная к телу со стороны шероховатой поверхности, направлена противоположно скорости движения тела относительно этой поверхности. При изменении направления скорости меняется и направление силы трения. Зависимость силы трения от скорости — главное отличие силы трения от сил упругости и тяготения (величина которых зависит только от взаимного расположения тел, т. е. от их координат).

В простейшей модели сухого трения выполняются следующие законы. Они являются обобщением опытных фактов и носят приближённый характер.

1. Максимальная величина силы трения покоя равна силе трения скольжения.

2. Абсолютная величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе реакции опоры:
$$f = \mu N.$$
Коэффициент пропорциональности μ называется *коэффициентом трения*.

3. Коэффициент трения не зависит от скорости движения тела по шероховатой поверхности.

4. Коэффициент трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

Этих законов достаточно для решения задач.

Задача. На горизонтальной шероховатой поверхности лежит брусок массой $m = 3$ кг. Коэффициент трения $\mu = 0{,}4$. К бруску приложена горизонтальная сила F. Найти силу трения в двух случаях: 1) при $F = 10$ Н; 2) при $F = 15$ Н.

Решение. Сделаем рисунок, расставим силы. Силу трения обозначаем $\vec{f}$ (рис. 31).

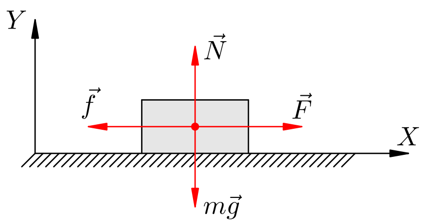

Рис. 31. К задаче

Запишем второй закон Ньютона:
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}. \tag{60}$$

Вдоль оси Y брусок не совершает движения, $a_y = 0$. Проектируя равенство (60) на ось Y, получим: $0 = -mg + N$, откуда $N = mg$.

Максимальная величина f_0 силы трения покоя (она же сила трения скольжения) равна:
$$f_0 = \mu N = \mu mg = 0{,}4 \cdot 3 \cdot 10 = 12 \text{ Н}.$$

1) Сила $F = 10$ Н меньше максимальной силы трения покоя. Брусок остаётся на месте, и сила трения будет силой трения покоя: $f = F = 10$ Н.

2) Сила $F = 15$ Н больше максимальной силы трения покоя. Брусок начнёт скользить, и сила трения будет силой трения скольжения: $f = f_0 = 12$ Н.

12.2 Вязкое трение

Сила сопротивления, возникающая при движении тела в вязкой среде (жидкости или газе), обладает совершенно иными свойствами.

Во-первых, отсутствует сила трения покоя. Например, человек может сдвинуть с места плавающий многотонный корабль, просто потянув за канат.

Во-вторых, сила сопротивления зависит от формы движущегося тела. Корпус подводной лодки, самолёта или ракеты имеет обтекаемую сигарообразную форму — для уменьшения силы сопротивления. Наоборот, при движении полусферического тела вогнутой стороной вперёд сила сопротивления очень велика (пример — парашют).

В третьих, абсолютная величина силы сопротивления существенно зависит от скорости. При малых скоростях движения сила сопротивления прямо пропорциональна скорости:

$$f = \alpha v.$$

При больших скоростях сила сопротивления прямо пропорциональна квадрату скорости:

$$f = \beta v^2.$$

Например, при падении в воздухе зависимость силы сопротивления от квадрата скорости имеет место уже при скоростях около нескольких метров в секунду. Коэффициенты α и β зависят от формы и размеров тела, от физических свойств поверхности тела и вязкой среды.

Так, парашютист при затяжном прыжке не набирает скорость безгранично, а с определённого момента начинает падать с установившейся скоростью, при которой сила сопротивления становится равна силе тяжести:

$$\beta v^2 = mg.$$

Отсюда установившаяся скорость:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}\,. \tag{61}$$

Задача. Два металлических шарика, одинаковых по размеру и различных по массе, падают без начальной скорости с одной и той же большой высоты. Какой из шариков быстрее упадёт на землю — лёгкий или тяжёлый?

Решение. Из формулы (61) следует, что у тяжёлого шарика установившаяся скорость падения больше. Значит, он дольше будет набирать скорость и потому быстрее достигнет земли.

13 Статика твёрдого тела

Статика изучает равновесие тел под действием приложенных к ним сил. *Равновесие* — это состояние тела, при котором каждая его точка остаётся всё время неподвижной в некоторой инерциальной системе отсчёта.

Условием равновесия материальной точки является равенство нулю равнодействующей (т. е. векторной суммы) всех сил, приложенных к точке. В этом случае наша точка будет двигаться равномерно и прямолинейно в произвольной инерциальной системе отсчёта. Значит, система отсчёта, связанная с точкой, также будет инерциальной, и в ней точка будет покоиться.

В случае твёрдого тела ситуация сложнее. Прежде всего, важно учитывать точку приложения каждой силы.

- Сила тяжести приложена в центре тяжести тела. Для тела простой формы центр тяжести совпадает с центром симметрии.

- Силы упругости и трения приложены в точке или в плоскости контакта тела с соприкасающимся телом.

Прямая линия, проходящая через точку приложения вдоль вектора силы, называется *линией действия* силы. Оказывается, точку приложения силы можно переносить вдоль линии её действия — от этого механическое состояние тела не изменится (в частности, равновесие не нарушится).

Для равновесия твёрдого тела недостаточно потребовать равенства нулю векторной суммы всех приложенных к телу сил.

В качестве примера рассмотрим *пару сил* — так называются две равные по модулю противоположно направленные силы, линии действия которых не совпадают. Пусть пара сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложена к твёрдому стержню (рис. 32).

Рис. 32. Пара сил

Векторная сумма этих сил равна нулю. Но стержень покоиться не будет: он начнёт вращаться. В данном случае не выполнено второе условие равновесия твёрдого тела. Чтобы его сформулировать, нужно ввести понятие момента силы.

Как должна быть направлена линия действия силы, чтобы тело стало вращаться вокруг неподвижной оси? Для начала заметим следующее.

- Если линия действия силы параллельна данной оси, то вращения не будет.

- Если линия действия силы пересекает данную ось, то вращения не будет.

В каждом из этих случаев действие силы вызывает лишь деформацию твёрдого тела.

Чтобы началось вращение, линия действия силы и ось вращения должны быть скрещивающимися прямыми.

Без ограничения общности можно считать эти прямые перпендикулярными друг другу. Мы всегда можем этого добиться, разложив силу на две составляющие — параллельную и перпендикулярную оси вращения — и отбросив параллельную составляющую как не вызывающую вращения. Поэтому везде далее мы считаем, что все силы, действующие на тело, перпендикулярны оси вращения.

13.1 Момент силы

Плечо силы — это расстояние от оси вращения до линия действия силы (т. е. длина общего перпендикуляра к двум этим прямым).

В качестве примера на рис. 33 изображён диск, к которому приложена сила $\vec{F}$. Ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа и проходит через точку O. Плечом силы является величина $l = OH$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы.

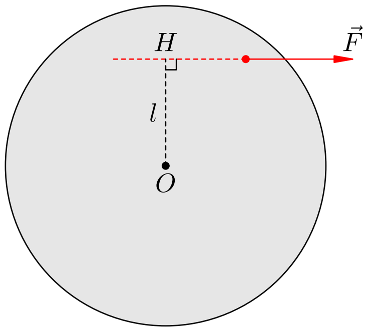

Рис. 33. Плечо силы

Момент силы относительно оси вращения — это произведение силы на плечо:

$$M = Fl.$$

Чтобы учесть также направление вращения, вызываемого действием силы, моменту силы приписывают знак. Именно, момент силы считается положительным, если сила стремится поворачивать тело против часовой стрелки, и отрицательным, если по часовой стрелке.

13.2 Условия равновесия

Если тело имеет неподвижную ось вращения и если алгебраическая сумма моментов всех сил относительно этой оси обращается в нуль, то тело будет находиться в равновесии. Это так называемое *правило моментов*. Оказывается, что в этом случае обращается в нуль алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой другой оси, параллельной оси вращения.

В общем случае, когда твёрдое тело может совершать как поступательное, так и вращательное движение, мы имеем два условия равновесия.

1. Равна нулю векторная сумма всех сил, приложенных к телу.

2. Равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно данной оси вращения или любой другой оси, параллельной данной.

Так, в примере на рис. 32 алгебраическая сумма моментов пары сил не обращается нуль (оба момента положительны). Поэтому стержень не находится в равновесии.

При решении задач удобно использовать сформулированные выше условия равновесия в следующем виде.

$1'$. Силы уравновешены вдоль любой оси.

$2'$. Суммарный момент сил, вращающих тело в одну сторону, равен суммарному моменту сил, вращающих тело в другую сторону.

Сейчас мы разберём одну достаточно содержательную задачу по статике и посмотрим, как работают наши условия равновесия.

Задача. Однородная лестница опирается на гладкую вертикальную стену, образуя с ней угол α. При каком максимальном значении α лестница будет покоиться? Коэффициент трения между лестницей и полом равен μ.

Решение. Пусть лестница опирается о пол и стену в точках A и B соответственно (рис. 34). Расставим силы, действующие на лестницу.

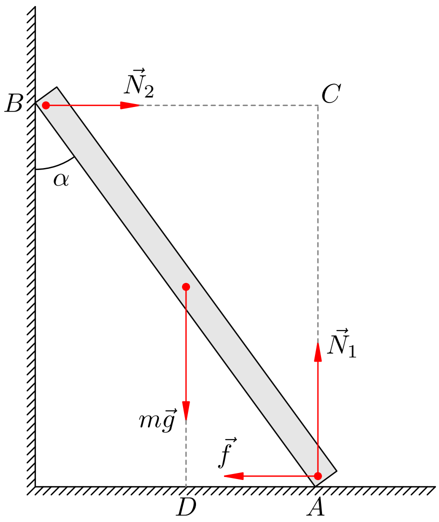

Рис. 34. К задаче

Поскольку лестница однородная, сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в середине лестницы.

Сила упругости пола $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{f}$ приложены в точке A. На рис. 34 точка приложения этих сил немного смещена от точки A внутрь лестницы; тем самым мы однозначно указываем, что силы приложены именно к лестнице (а не к полу).

Точно так же сила упругости стены $\vec{N}_2$ приложена в точке B. Поскольку стена гладкая, сила трения между стеной и лестницей отсутствует.

Воспользуемся условием $1'$. Вдоль горизонтальной оси силы уравновешены:

$$f = N_2. \tag{62}$$

Вдоль вертикальной оси силы также уравновешены:

$$mg = N_1. \tag{63}$$

Теперь переходим к правилу моментов — условию $2'$. Какую ось вращения выбрать? Удобнее всего взять ось, проходящую через точку A (перпендикулярно плоскости рисунка). В таком случае моменты сразу двух сил $\vec{f}$ и $\vec{N}_1$ обратятся в нуль — ведь плечи этих сил относительно точки A равны нулю (поскольку линии действия сил проходят через эту точку). Ненулевые моменты относительно точки A имеют силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}_2$, которые стремятся вращать лестницу в разные стороны; стало быть, моменты данных сил должны быть равны друг другу.

Плечо силы $\vec{N}_2$ — это длина перпендикуляра AC, опущенного из точки A на линию BC действия силы $\vec{N}_2$. Плечо силы $m\vec{g}$ — это длина перпендикуляра AD, опущенного из точки A на линию действия силы $m\vec{g}$. Согласно правилу моментов имеем:

$$N_2 \cdot AC = mg \cdot AD.$$

Пусть длина лестницы равна $2l$. Тогда $AC = 2l\cos\alpha$, $AD = l\sin\alpha$. Подставляем эти соотношения в равенство моментов:

$$N_2 \cdot 2l\cos\alpha = mg\cdot l\sin\alpha,$$

откуда

$$2N_2 = mg\operatorname{tg}\alpha. \tag{64}$$

С учётом равенства (62) имеем вместо (64):

$$2f = mg\operatorname{tg}\alpha. \tag{65}$$

Вспомним теперь, что в условии спрашивается *максимальное* значение α. При максимальном угле α лестница пока ещё стоит, но уже находится *на грани проскальзывания*. Это означает, что сила трения f достигла своего максимального значения, равного силе трения скольжения:

$$f = \mu N_1.$$

Теперь из (65) имеем:

$$2\mu N_1 = mg\operatorname{tg}\alpha,$$

а с учётом равенства (63):

$$2\mu mg = mg\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда получаем искомую максимальную величину α:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(2\mu).$$

14 Статика жидкостей и газов

В гидро- и аэростатике рассматриваются два вопроса: 1) равновесие жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил; 2) равновесие твёрдых тел в жидкостях и газах.

Многие из обсуждаемых далее фактов относятся равным образом как к жидкостям, так и к газам. В таких случаях мы будем называть жидкость и газ *средой*.

При сжатии среды в ней возникают силы упругости, называемые *силами давления*. Силы давления действуют между соприкасающимися слоями среды, на погружённые в среду твёрдые тела, а также на дно и стенки сосуда.

Сила давления среды обладает двумя характерными свойствами.

1. Сила давления действует перпендикулярно поверхности выделенного элемента среды или твёрдого тела. Это объясняется текучестью среды: силы упругости не возникают в ней при относительном сдвиге слоёв, поэтому отсутствуют силы упругости, касательные к поверхности.

2. Сила давления равномерно распределена по той поверхности, на которую она действует.

Естественной величиной, возникающей в процессе изучения сил давления среды, является давление.

Пусть на поверхность площади S действует сила F, которая перпендикулярна поверхности и равномерно распределена по ней. *Давлением* называется величина

$$p = \frac{F}{S}\,.$$

Единицей измерения давления служит *паскаль* (Па). 1 Па — это давление, производимое силой 1 Н на поверхность площадью 1 м^2.

Полезно помнить приближённое значение нормального атмосферного давления: $p_0 = 10^5$ Па.

14.1 Гидростатическое давление

Гидростатическим называется давление неподвижной жидкости, вызванное силой тяжести. Найдём формулу для гидростатического давления столба жидкости.

Предположим, что в сосуд с площадью дна S налита жидкость до высоты h (рис. 35). Плотность жидкости равна ρ.

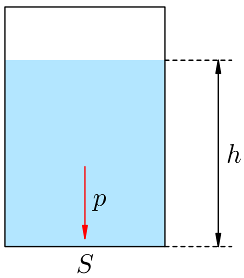

Рис. 35. Гидростатическое давление

Объём жидкости равен Sh, поэтому масса жидкости $m = \rho Sh$. Сила F давления жидкости на дно сосуда — это вес жидкости. Так как жидкость неподвижна, её вес равен силе тяжести:

$$F = mg = \rho Shg.$$

Разделив силу F на площадь S, получим давление жидкости:

$$p = \rho g h.$$

Это и есть формула гидростатического давления.

Так, на глубине 10 м вода оказывает давление $p = 1000 \cdot 10 \cdot 9{,}8 = 98000$ Па, примерно равное атмосферному. Можно сказать, что *атмосферное давление приблизительно равно 10 м водного столба.*

Для практики столь большая высота столба жидкости неудобна, и реальные жидкостные манометры — ртутные. Посмотрим, какую высоту должен иметь столб ртути ($\rho = 13600$ кг/м^3), чтобы создать аналогичное давление:

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{10^5}{13600 \cdot 9{,}8} = 0{,}75\,\text{м} = 750\,\text{мм}.$$

Вот почему для измерения атмосферного давления широко используется *миллиметр ртутного столба* (мм рт. ст.).

14.2 Закон Паскаля

Если поставить гвоздь вертикально и ударить по нему молотком, то гвоздь передаст действие молотка по вертикали, но не вбок. Твёрдые тела из-за наличия кристаллической решётки передают производимое на них давление только в направлении действия силы.

Жидкости и газы (напомним, что мы называем их средами) ведут себя иначе. В средах справедлив закон Паскаля.

Закон Паскаля. Давление, оказываемое на жидкость или газ, передаётся в любую точку этой среды без изменения по всем направлениям.

(В частности, на площадку, помещённую внутри жидкости на фиксированной глубине, действует одна и та же сила давления, как эту площадку ни поворачивай.)

Например, ныряльщик на глубине h испытывает давление $p = p_0 + \rho g h$. Почему? Согласно закону Паскаля вода передаёт давление атмосферы p_0 без изменения на глубину h, где оно прибавляется к гидростатическому давлению водяного столба $\rho g h$.

Отличной иллюстрацией закона Паскаля служит опыт с шаром Паскаля. Это шар с множеством отверстий, соединённый с цилиндрическим сосудом (рис. 36)[6].

Рис. 36. Шар Паскаля

Если налить в сосуд воду и двинуть поршень, то вода брызнет из всех отверстий. Это как раз и означает, что вода передаёт внешнее давление по всем направлениям.

То же самое наблюдается и для газа: если сосуд наполнить дымом, то при движении поршня струйки дыма пойдут опять-таки из всех отверстий сразу. Стало быть, газ также передаёт давление по всем направлениям.

Вы ежедневно пользуетесь законом Паскаля, когда выдавливаете зубную пасту из тюбика. А именно, вы сжимаете тюбик в поперечном направлении, а паста двигается перпендикулярно вашему усилию — в продольном направлении. Почему? Ваше давление передаётся внутри тюбика по всем направлениям, в частности — в сторону отверстия тюбика. Туда-то паста и выходит.

[6]Изображение с сайта http://festival.1september.ru.

14.3 Гидравлический пресс

Гидравлический пресс — это устройство, дающее выигрыш в силе. Что значит «выигрыш в силе»? Имеется в виду, что, прикладывая сравнительно небольшую силу в одном месте данного устройства, оказывается возможным получить значительно большее усилие в другом его месте.

Гидравлический пресс изображён на рис. 37. Он состоит из двух сообщающихся сосудов, имеющих разную площадь поперечного сечения и закрытых поршнями. В сосудах между поршнями находится жидкость.

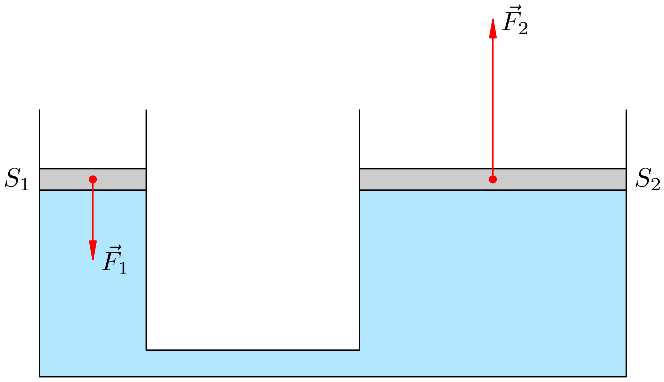

Рис. 37. Гидравлический пресс

Принцип действия гидравлического пресса очень прост и основан на законе Паскаля.

Пусть S_1 — площадь малого поршня, S_2 — площадь большого поршня. Надавим на малый поршень с силой F_1. Тогда под малым поршнем в жидкости возникнет давление:

$$p = \frac{F_1}{S_1}\,.$$

Согласно закону Паскаля это давление будет передано без изменения по всем направлениям в любую точку жидкости, в частности — непосредственно под большой поршень. Следовательно, на большой поршень со стороны жидкости будет действовать сила:

$$F_2 = pS_2 = F_1\frac{S_2}{S_1}\,.$$

Полученное соотношение можно переписать и так:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}\,.$$

Мы видим, что F_2 больше F_1 во столько раз, во сколько S_2 больше S_1. Например, если площадь большого поршня в 100 раз превышает площадь малого поршня, то усилие на большом поршне окажется в 100 раз больше усилия на малом поршне. Вот каким образом гидравлический пресс даёт выигрыш в силе.

14.4 Закон Архимеда

Почему плавают корабли? Почему поднимается вверх воздушный шар? Сейчас мы начнём разбираться с этими вопросами. И снова на помощь придёт закон Паскаля.

Мы знаем, что дерево в воде не тонет. Следовательно, сила тяжести уравновешивается какой-то другой силой, действующей на кусок дерева со стороны воды вертикально вверх. Эта сила называется *выталкивающей* или *архимедовой* силой. Она действует на всякое тело, погружённое в жидкость или газ.

Выясним причину возникновения архимедовой силы. Рассмотрим цилиндр площадью поперечного сечения S и высотой h, погружённый в жидкость плотности ρ. Основания цилиндра горизонтальны. Верхнее основание находится на глубине h_1, нижнее — на глубине $h_2 = h_1 + h$ (рис. 38).

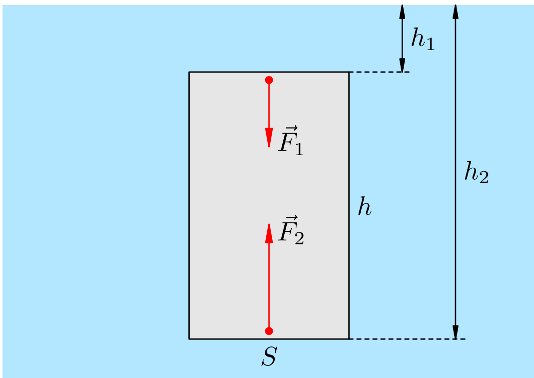

Рис. 38. $F_{\text{А}} = F_2 - F_1$

На боковую поверхность цилиндра действуют силы давления, которые приводят лишь к сжатию цилиндра. Эти силы можно не принимать во внимание.

На уровне верхнего основания цилиндра давление жидкости равно $p_1 = \rho g h_1$. На верхнее основание действует сила давления $F_1 = p_1 S = \rho g h_1 S$, направленная вертикально вниз.

На уровне нижнего основания цилиндра давление жидкости равно $p_2 = \rho g h_2$. На нижнее основание действует сила давления $F_2 = p_2 S = \rho g h_2 S$, направленная вертикально вверх (закон Паскаля!).

Так как $h_2 > h_1$, то $F_2 > F_1$, и поэтому возникает равнодействующая сил давления, направленная вверх. Это и есть архимедова сила $F_{\text{А}}$. Имеем:

$$F_{\text{А}} = F_2 - F_1 = \rho g h_2 S - \rho g h_1 S = \rho g S(h_2 - h_1) = \rho g S h.$$

Но произведение Sh равно объёму цилиндра V. Получаем окончательно:

$$F_{\text{А}} = \rho g V. \tag{66}$$

Это и есть формула для архимедовой силы. Возникает архимедова сила вследствие того, что давление жидкости на нижнее основание цилиндра больше, чем на верхнее.

Формулу (66) можно интерпретировать следующим образом. Произведение ρV — это масса жидкости m, объём которой равен V: $\rho V = m$. Но тогда $\rho g V = mg = P$, где P — вес жидкости, взятой в объёме V. Поэтому наряду с (66) имеем:

$$F_{\text{А}} = P. \tag{67}$$

Иными словами, архимедова сила, действующая на цилиндр, равна весу жидкости, объём которой совпадает с объёмом цилиндра.

Формулы (66) и (67) справедливы и в общем случае, когда погружённое в жидкость или газ тело объёма V имеет *любую* форму, а не только форму цилиндра (конечно, в случае газа ρ — это плотность газа). Поясним, почему так получается.

Выделим мысленно в среде некоторый объём V произвольной формы. Этот объём находится в равновесии: не тонет и не всплывает. Следовательно, сила тяжести, действующая на среду, находящуюся внутри выделенного нами объёма, уравновешена силами давления на поверхность нашего объёма со стороны остальной среды — ведь на нижние элементы поверхности приходится большее давление, чем на верхние.

Иными словами, равнодействующая сил гидростатического давления на поверхность выделенного объёма — архимедова сила — направлена вертикально вверх и равна весу среды в этом объёме.

Сила тяжести, действующая на наш объём, приложена к его центру тяжести. Значит, и архимедова сила должна быть приложена к центру тяжести выделенного объёма. В противном случае сила тяжести и архимедова сила образуют пару сил, которая вызовет вращение нашего объёма (а он находится в равновесии).

А теперь заменим выделенный объём среды твёрдым телом того же объёма V и той же самой формы. Ясно, что силы давления среды на поверхность тела не изменятся, так как неизменной осталась *конфигурация* среды, окружающей тело. Поэтому архимедова сила по-прежнему будет направлена вертикально вверх и равна весу среды, взятой в объёме V. Точкой приложения архимедовой силы будет центр тяжести тела.

Закон Архимеда. На погружённое в жидкость или газ тело действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу среды, объём которой равен объёму тела.

Таким образом, архимедова сила всегда находится по формуле (66). Заметим, что в эту формулу не входят ни плотность тела, ни какие-либо его геометрические характеристики — при фиксированном объёме величина архимедовой силы не зависит от вещества и формы тела.

До сих пор мы рассматривали случай полного погружения тела. Чему равна архимедова сила при частичном погружении? На ту часть тела, которая находится над поверхностью жидкости, никакая выталкивающая сила не действует. Если эту часть мысленно срезать, то величина архимедовой силы не изменится. Но тогда мы получим целиком погружённое тело, объём которого равен объёму погружённой части исходного тела.

Значит, *на частично погружённое в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, объём которой равен объёму погружённой части тела*. Формула (66) справедлива и в этом случае, только объём всего тела V нужно заменить на объём погружённой части $V_{\text{погр}}$:

$$F_{\text{A}} = \rho g V_{\text{погр}}.$$

Архимед обнаружил, что целиком погружённое в воду тело вытесняет объём воды, равный собственному объёму. Тот же факт имеет место для других жидкостей и газов. Поэтому можно сказать, что *на всякое тело, погружённое в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом среды.*

14.5 Плавание тел

Рассмотрим тело плотности ρ и жидкость плотности ρ_0. Допустим, что тело полностью погрузили в жидкость и отпустили.

Сразу после отпускания на тело действуют лишь сила тяжести mg и архимедова сила F_{A}. Если объём тела равен V, то

$$mg = \rho g V, \quad F_{\text{A}} = \rho_0 g V.$$

Имеются три возможности дальнейшего движения тела.

1. Сила тяжести больше архимедовой силы: $mg > F_{\text{A}}$, или $\rho > \rho_0$. В этом случае тело тонет.

2. Сила тяжести равна архимедовой силе: $mg = F_{\text{A}}$, или $\rho = \rho_0$. В этом случае тело остаётся неподвижным в состоянии *безразличного равновесия.*

3. Сила тяжести меньше архимедовой силы: $mg < F_{\text{A}}$, или $\rho < \rho_0$. В этом случае тело всплывает, достигая поверхности жидкости. При дальнейшем всплытии начнёт уменьшаться объём погружённой части тела, а вместе с ним и архимедова сила. В какой-то

момент архимедова сила сравняется с силой тяжести (положение равновесия). Тело по инерции всплывёт дальше, остановится, снова начнёт погружаться... Возникнут затухающие колебания, после которых тело останется плавать в положении равновесия ($mg = F_{\text{А}}$), частично погрузившись в жидкость.

Таким образом, *условие плавания* тела можно записать в виде неравенства: $\rho \leqslant \rho_0$. Например, лёд ($\rho = 900$ кг/м^3) будет плавать в воде ($\rho_0 = 1000$ кг/м^3), но утонет в спирте ($\rho_0 = 800$ кг/м^3).

15 Импульс

Импульс тела — это векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Специальных единиц измерения импульса нет. Размерность импульса — это просто произведение размерности массы на размерность скорости:

$$[p] = [m] \cdot [v] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Почему понятие импульса является интересным? Оказывается, с его помощью можно придать второму закону Ньютона несколько иную, также чрезвычайно полезную форму.

15.1 Второй закон Ньютона в импульсной форме

Пусть $\vec{F}$ — равнодействующая сил, приложенных к телу массы m. Начинаем с обычной записи второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

С учётом того, что ускорение тела $\vec{a}$ равно производной вектора скорости, второй закон Ньютона переписывается следующим образом:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Вносим константу m под знак производной:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

Как видим, в левой части получилась производная импульса:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{68}$$

Соотношение (68) и есть новая форма записи второго закона Ньютона.

Второй закон Ньютона в импульсной форме. Производная импульса тела есть равнодействующая приложенных к телу сил.

Можно сказать и так: результирующая сила, действующая на тело, равна скорости изменения импульса тела.

Производную в формуле (68) можно заменить на отношение конечных приращений:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{69}$$

В этом случае $\vec{F}$ есть *средняя* сила, действующая на тело в течение интервала времени Δt. Чем меньше величина Δt, тем ближе отношение $\Delta\vec{p}/\Delta t$ к производной $d\vec{p}/dt$, и тем ближе средняя сила $\vec{F}$ к своему мгновенному значению в данный момент времени.

В задачах, как правило, интервал времени Δt достаточно мал. Например, это может быть время соударения мяча со стенкой, и тогда $\vec{F}$ — средняя сила, действующая на мяч со стороны стенки во время удара.

Вектор $\Delta\vec{p}$ в левой части соотношения (69) называется *изменением импульса* за время Δt. Изменение импульса — это разность конечного и начального векторов импульса. А именно, если $\vec{p}_0$ — импульс тела в некоторый начальный момент времени, $\vec{p}$ — импульс тела спустя промежуток времени Δt, то изменение импульса есть разность:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0.$$

Подчеркнём ещё раз, что изменение импульса — это разность векторов (рис. 39). Напомним, что при построении разности векторов нужно совместить начала обоих векторов, соединить их концы и «уколоть» стрелкой тот вектор, из которого производится вычитание.

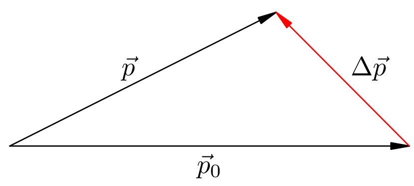

Рис. 39. Изменение импульса

Пусть, например, мяч летит перпендикулярно стенке (импульс перед ударом равен $\vec{p}_0$) и отскакивает назад без потери скорости (импульс после удара равен $\vec{p} = -\vec{p}_0$). Несмотря на то, что импульс по модулю не изменился ($p = p_0$), изменение импульса нулю не равно:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = -\vec{p}_0 - \vec{p}_0 = -2\vec{p}_0.$$

Геометрически эта ситуация показана на рис. 40:

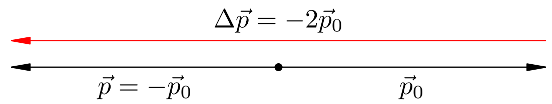

Рис. 40. Изменение импульса при отскоке назад

Модуль изменения импульса, как видим, равен удвоенному модулю начального импульса мяча: $\Delta p = 2p_0$.

Перепишем формулу (69) следующим образом:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t, \tag{70}$$

или, расписывая изменение импульса, как и выше:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t.$$

Величина $\vec{F}\Delta t$ называется *импульсом силы*. Специальной единицы измерения для импульса силы нет; размерность импульса силы равна просто произведению размерностей силы и времени:

$$[F\Delta t] = [F] \cdot [t] = \text{Н} \cdot \text{с}.$$

(Обратите внимание, что Н · с оказывается ещё одной возможной единицей измерения импульса тела.)

Словесная формулировка равенства (70) такова: *изменение импульса тела равно импульсу действующей на тело силы за данный промежуток времени.* Это, разумеется, снова есть второй закон Ньютона в импульсной форме.

15.2 Пример вычисления силы

В качестве примера применения второго закона Ньютона в импульсной форме давайте рассмотрим следующую задачу.

Задача. Шарик массы $m = 100$ г, летящий горизонтально со скоростью $v = 6$ м/с, ударяется о гладкую вертикальную стену и отскакивает от неё без потери скорости. Угол падения шарика (то есть угол между направлением движения шарика и перпендикуляром к стене) равен $\alpha = 60°$. Удар длится $\Delta t = 0{,}01$ с. Найти среднюю силу, действующую на шарик во время удара.

Решение. Покажем прежде всего, что угол отражения равен углу падения, то есть шарик отскочит от стены под тем же углом α (рис. 41).

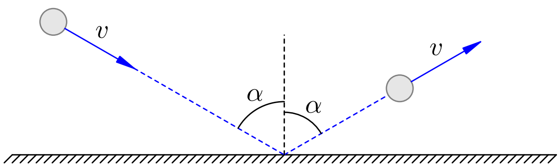

Рис. 41. К задаче (вид сверху)

Тут всё дело в том, что стена — гладкая. Это значит, что трения между шариком и стеной нет. Следовательно, со стороны стены на шарик действует единственная сила $\vec{N}$ — сила упругости, направленная перпендикулярно стене (рис. 42).

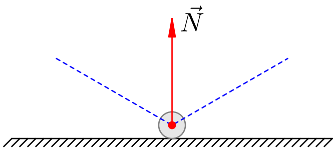

Рис. 42. К задаче

Согласно (70) имеем: $\Delta\vec{p} = \vec{N}\Delta t$. Отсюда следует, что вектор изменения импульса *сонаправлен* с вектором $\vec{N}$, то есть направлен перпендикулярно стене в сторону отскока шарика (рис. 43).

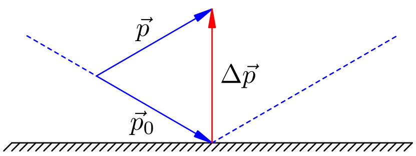

Рис. 43. К задаче

Векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{p}$ равны по модулю (так как скорость шарика не изменилась). Поэтому треугольник, составленный из векторов $\vec{p}_0$, $\vec{p}$ и $\Delta\vec{p}$, является равнобедренным. Значит, угол между векторами $\vec{p}$ и $\Delta\vec{p}$ равен α, то есть угол отражения действительно равен углу падения.

Теперь заметим вдобавок, что в нашем равнобедренном треугольнике есть угол $60°$ (это угол падения); стало быть, данный треугольник — равносторонний. Отсюда:

$$\Delta p = p_0 = mv = 0{,}1 \cdot 6 = 0{,}6 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

И тогда искомая средняя сила, действующая на шарик:

$$N = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0{,}6}{0{,}01} = 60 \text{ Н}.$$

15.3 Импульс системы тел

Начнём с простой ситуации системы двух тел. А именно, пусть имеются тело 1 и тело 2 с импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ соответственно. Импульс $\vec{p}$ системы данных тел — это векторная сумма импульсов каждого тела:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Оказывается, для импульса системы тел имеется формула, аналогичная второму закону Ньютона в виде (68). Давайте выведем эту формулу.

Все остальные объекты, с которыми взаимодействуют рассматриваемые нами тела 1 и 2, мы будем называть *внешними телами*. Силы, с которыми внешние тела действуют на тела 1 и 2, называем *внешними силами*. Пусть $\vec{F}_1$ — результирующая внешняя сила, действующая на тело 1. Аналогично $\vec{F}_2$ — результирующая внешняя сила, действующая на тело 2 (рис. 44).

Рис. 44. Система двух тел

Кроме того, тела 1 и 2 могут взаимодействовать друг с другом. Пусть тело 2 действует на тело 1 с силой $\vec{T}$. Тогда тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{T}'$. По третьему закону Ньютона силы $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ равны по модулю и противоположны по направлению: $\vec{T}' = -\vec{T}$. Силы $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ — это *внутренние силы*, действующие в системе.

Запишем для каждого тела 1 и 2 второй закон Ньютона в форме (68):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{T}, \tag{71}$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{T}'. \tag{72}$$

Сложим равенства (71) и (72):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{T} + \vec{T}'.$$

В левой части полученного равенства стоит сумма производных, равная производной суммы векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. В правой части имеем $\vec{T} + \vec{T}' = \vec{0}$ в силу третьего закона Ньютона:

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Но $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$ — это импульс системы тел 1 и 2. Обозначим также $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{\text{внеш}}$ — это результирующая внешних сил, действующих на систему. Получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}. \tag{73}$$

Таким образом, *скорость изменения импульса системы тел есть равнодействующая внешних сил, приложенных к системе.* Равенство (73), играющее роль второго закона Ньютона для системы тел, мы и хотели получить.

Формула (73) была выведена для случая двух тел. Теперь обобщим наши рассуждения на случай произвольного количества тел в системе.

Импульсом системы тел называется векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему. Если система состоит из N тел, то импульс этой системы равен:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N.$$

Дальше всё делается совершенно так же, как и выше (только технически это выглядит несколько сложнее). Если для каждого тела записать равенства, аналогичные (71) и (72), а затем все эти равенства сложить, то в левой части мы снова получим производную импульса системы, а в правой части останется лишь сумма внешних сил (внутренние силы, попарно складываясь, дадут нуль ввиду третьего закона Ньютона). Поэтому равенство (73) останется справедливым и в общем случае.

15.4 Закон сохранения импульса

Система тел называется *замкнутой*, если действия внешних тел на тела данной системы или пренебрежимо малы, или компенсируют друг друга. Таким образом, в случае замкнутой системы тел существенно лишь взаимодействие этих тел друг с другом, но не с какими-либо другими телами.

Равнодействующая внешних сил, приложенных к замкнутой системе, равна нулю: $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{0}$. В этом случае из (73) получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}.$$

Но если производная вектора обращается в нуль (скорость изменения вектора равна нулю), то сам вектор не меняется со временем:

$$\vec{p} = \text{const}.$$

Закон сохранения импульса. Импульс замкнутой системы тел остаётся постоянным с течением времени при любых взаимодействиях тел внутри данной системы.

Простейшие задачи на закон сохранения импульса решаются по стандартной схеме, которую мы сейчас покажем.

Задача. Тело массы $m_1 = 800$ г движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с по гладкой горизонтальной поверхности. Навстречу ему движется тело массы $m_2 = 200$ г со скоростью $v_2 = 13$ м/с. Происходит абсолютно неупругий удар (тела слипаются). Найти скорость тел после удара.

Решение. Ситуация изображена на рис. 45. Ось X направим в сторону движения первого тела.

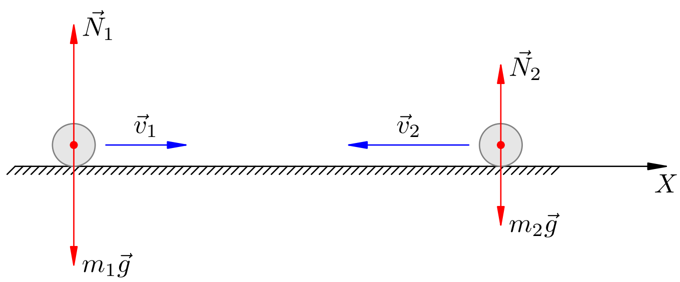

Рис. 45. К задаче

Поскольку поверхность гладкая, трения нет. Поскольку поверхность горизонтальная, а движение происходит вдоль неё, сила тяжести и реакция опоры уравновешивают друг друга:

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = \vec{0}, \quad m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = \vec{0}.$$

Таким образом, векторная сумма сил, приложенных к системе данных тел, равна нулю. Это значит, что система тел замкнута. Стало быть, для неё выполняется закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_{\text{до удара}} = \vec{p}_{\text{после удара}}. \tag{74}$$

Импульс системы до удара — это сумма импульсов тел:

$$\vec{p}_{\text{до удара}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

После неупругого удара получилось одно тело массы $m_1 + m_2$, которое движется с искомой скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{p}_{\text{после удара}} = (m_1 + m_2)\vec{v}.$$

Из закона сохранения импульса (74) имеем:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}.$$

Отсюда находим скорость тела, образовавшегося после удара:

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Переходим к проекциям на ось X:

$$v_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

По условию имеем: $v_{1x} = 3$ м/с, $v_{2x} = -13$ м/с, так что

$$v_x = \frac{0{,}8 \cdot 3 - 0{,}2 \cdot 13}{0{,}8 + 0{,}2} = -0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знак минус указывает на то, что слипшиеся тела двигаются в сторону, противоположную оси X. Искомая скорость: $v = 0{,}2$ м/с.

15.5 Закон сохранения проекции импульса

Часто в задачах встречается следующая ситуация. Система тел не является замкнутой (векторная сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю), но существует такая ось X, что *сумма проекций внешних сил на ось X равна нулю* в любой момент времени. Тогда можно сказать, что вдоль данной оси наша система тел ведёт себя как замкнутая, и проекция импульса системы на ось X сохраняется.

Покажем это более строго. Спроектируем равенство (73) на ось X:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_{\text{внеш},\,x}.$$

Если проекция равнодействующей внешних сил обращается в нуль, $F_{\text{внеш},\,x} = 0$, то

$$\frac{dp_x}{dt} = 0.$$

Следовательно, проекция p_x есть константа:

$$p_x = \text{const}.$$

Закон сохранения проекции импульса. Если проекция на ось X суммы внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то проекция p_x импульса системы не меняется с течением времени.

Давайте посмотрим на примере конкретной задачи, как работает закон сохранения проекции импульса.

Задача. Мальчик массы M, стоящий на коньках на гладком льду, бросает камень массы m со скоростью v под углом α к горизонту. Найти скорость u, с которой мальчик откатывается назад после броска.

Решение. Ситуация схематически показана на рис. 46. Мальчик изображён прямоугольником.

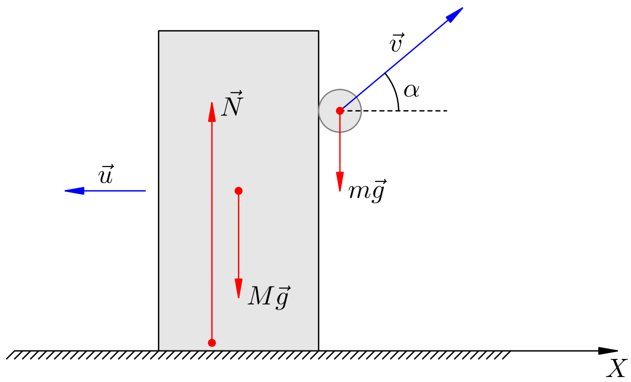

Рис. 46. К задаче

Импульс системы «мальчик + камень» не сохраняется. Это видно хотя бы из того, что после броска появляется вертикальная составляющая импульса системы (а именно, вертикальная составляющая импульса камня), которой до броска не было.

Стало быть, система, которую образуют мальчик и камень, не замкнута. Почему? Дело в том, что векторная сумма внешних сил $M\vec{g}+m\vec{g}+\vec{N}$ не равна нулю во время броска. Величина N больше, чем сумма $Mg + mg$, и за счёт этого превышения как раз и появляется вертикальная компонента импульса системы.

Однако внешние силы действуют только по вертикали (трения нет). Стало быть, сохраняется проекция импульса на горизонтальную ось X. До броска эта проекция была равна нулю. Направляя ось X в сторону броска (так что мальчик поехал в направлении отрицательной полуоси), получим:

$$-Mu + mv_0 \cos\alpha = 0,$$

откуда

$$u = \frac{mv_0 \cos\alpha}{M}\,.$$

16 Энергия

Мы приступаем к изучению энергии — фундаментального физического понятия. Но предварительно нужно разобраться с другой физической величиной — работой силы.

16.1 Работа

Пусть на тело действует постоянная сила $\vec{F}$ и тело, двигаясь прямолинейно по горизонтальной поверхности, совершило перемещение $\vec{s}$. Сила $\vec{F}$ не обязательно является непосредственной причиной перемещения (так, сила тяжести не является непосредственной причиной перемещения шкафа, который передвигают по комнате).

Предположим сначала, что векторы силы и перемещения сонаправлены (рис. 47; остальные силы, действующие на тело, не указаны).

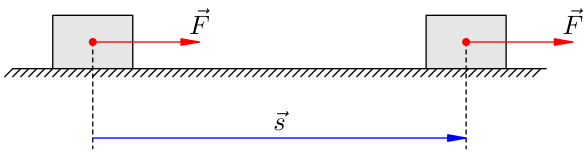

Рис. 47. $A = Fs$

В этом простейшем случае работа A определяется как произведение модуля силы на модуль перемещения:

$$A = Fs. \tag{75}$$

Единицей измерения работы служит *джоуль* (Дж): Дж = Н · м. Таким образом, если под действием силы 1 Н тело перемещается на 1 м, то сила совершает работу 1 Дж.

Работа силы, перпендикулярной перемещению, по определению считается равной нулю. Так, в данном случае сила тяжести и сила реакции опоры не совершают работы.

Пусть теперь вектор силы образует с вектором перемещения острый угол α (рис. 48).

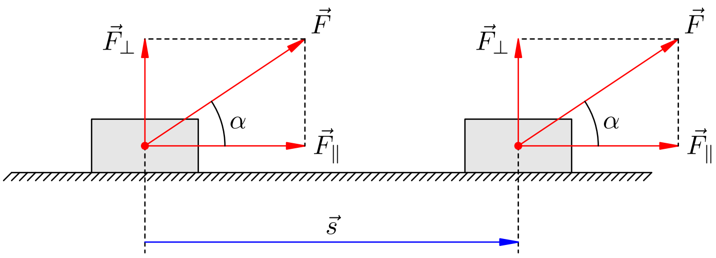

Рис. 48. $A = Fs\cos\alpha$

Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие: $\vec{F}_\parallel$ (параллельную перемещению) и $\vec{F}_\perp$ (перпендикулярную перемещению). Работу совершает только $\vec{F}_\parallel$. Поэтому для работы силы $\vec{F}$ получаем: $A = F_\parallel s = F\cos\alpha \cdot s$. Итак,

$$A = Fs\cos\alpha. \tag{76}$$

Если вектор силы образует с вектором перемещения тупой угол α, то работа по-прежнему определяется формулой (76). В этом случае работа оказывается отрицательной.

Например, работа силы трения скольжения, действующей на тело в рассмотренных ситуациях, будет отрицательной, так как сила трения направлена противоположно перемещению. В этом случае имеем: $\alpha = 180^\circ$, $\cos\alpha = -1$, и для работы силы трения получаем:

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}s = -\mu mgs,$$

где m — масса тела, μ — коэффициент трения между телом и опорой.

Соотношение (76) означает, что работа является *скалярным произведением* векторов силы и перемещения:

$$A = \vec{F}\vec{s}.$$

Это позволяет вычислять работу через координаты данных векторов:

$$A = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z.$$

Пусть на тело действуют несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, и $\vec{F}$ — равнодействующая этих сил. Для работы силы $\vec{F}$ имеем:

$$A = \vec{F}\vec{s} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n)\vec{s} = \vec{F}_1\vec{s} + \vec{F}_2\vec{s} + \ldots + \vec{F}_n\vec{s},$$

или

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — работы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Итак, *работа равнодействующей приложенных к телу сил равна сумме работ каждой силы в отдельности.*

16.2 Мощность

Часто имеет значение быстрота, с которой совершается работа. Скажем, на практике важно знать, какую работу сможет выполнить данное устройство за фиксированное время.

Мощность — это величина, характеризующая скорость совершения работы. Мощность N есть отношение работы A ко времени t, за которое эта работа совершена:

$$N = \frac{A}{t}.$$

Мощность измеряется в *ваттах* (Вт). 1 Вт = 1 Дж/с, то есть 1 Вт — это такая мощность, при которой работа в 1 Дж совершается за 1 с.

Предположим, что силы, действующие на тело, уравновешены, и тело движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}$. В этом случае существует полезная формула для мощности, развиваемой одной из действующих сил $\vec{F}$.

За время t тело совершит перемещение $\vec{s} = \vec{v}t$. Работа силы $\vec{F}$ будет равна:

$$A = \vec{F}\vec{s} = \vec{F}\vec{v}t.$$

Отсюда получаем мощность:

$$N = \vec{F}\vec{v},$$

или

$$N = Fv\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами силы и скорости.

Наиболее часто эта формула используется в ситуации, когда $\vec{F}$ — «сила тяги» двигателя автомобиля (которая на самом деле есть сила трения ведущих колёс о дорогу). В этом случае $\alpha = 0$, и мы получаем просто:

$$N = Fv.$$

16.3 Механическая энергия

Энергия является мерой движения и взаимодействия любых объектов в природе. Имеются различные формы энергии: механическая, тепловая, электромагнитная, ядерная...

Опыт показывает, что энергия не появляется ниоткуда и не исчезает бесследно, она лишь переходит из одной формы в другую. Это самая общая формулировка *закона сохранения энергии*.

Каждый вид энергии представляет собой некоторое математическое выражение. Закон сохранения энергии означает, что в каждом явлении природы определённая сумма таких выражений остаётся постоянной с течением времени.

Измеряется энергия в джоулях, как и работа.

Механическая энергия является мерой движения и взаимодействия механических объектов (материальных точек, твёрдых тел).

Мерой движения тела является *кинетическая энергия*. Она зависит от скорости тела. Мерой взаимодействия тел является *потенциальная энергия*. Она зависит от взаимного расположения тел.

Механическая энергия системы тел равна сумме кинетической энергии тел и потенциальной энергии их взаимодействия друг с другом.

16.4 Кинетическая энергия

Кинетической энергией тела (принимаемого за материальную точку) называется величина

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

где m — масса тела, v — его скорость.

Кинетической энергией системы из N тел называется сумма кинетических энергий каждого тела:

$$K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_N v_N^2}{2}.$$

Если тело движется под действием силы $\vec{F}$, то кинетическая энергия тела, вообще говоря, меняется со временем. Оказывается, именение кинетической энергии тела за некоторый промежуток времени равно работе силы $\vec{F}$. Покажем это для случая прямолинейного равноускоренного движения.

Пусть $\vec{v}_1$ — начальная скорость, $\vec{v}_2$ — конечная скорость тела. Выберем ось X вдоль траектории тела (и, соответственно, вдоль вектора силы $\vec{F}$). Для работы силы $\vec{F}$ получаем:

$$A = \vec{F}\vec{s} = F_x s_x = m a_x s_x = m a_x \frac{v_{2x}^2 - v_{1x}^2}{2a_x} = \frac{mv_{2x}^2 - mv_{1x}^2}{2}.$$

(мы воспользовались формулой для s_x, выведенной в статье «Равноускоренное движение»).

Заметим теперь, что в данном случае проекция скорости отличается от модуля скорости разве что знаком; поэтому $v_{1x}^2 = v_1^2$ и $v_{2x}^2 = v_2^2$. В результате имеем:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1 = \Delta K,$$

что и требовалось.

На самом деле соотношение $\Delta K = A$ справедливо и в самом общем случае криволинейного движения под действием переменной силы.

Теорема о кинетической энергии. Изменение кинетической энергии тела равно работе, совершённой приложенными к телу внешними силами за рассматриваемый промежуток времени.

Если работа внешних сил положительна, то кинетическая энергия увеличивается ($\Delta K > 0$, тело разгоняется).

Если работа внешних сил отрицательна, то кинетическая энергия уменьшается ($\Delta K < 0$, тело замедляет движение). Пример — торможение под действием силы трения, работа которой отрицательна.

Если же работа внешних сил равна нулю, то кинетическая энергия тела за это время не меняется. Нетривиальный пример — равномерное движение по окружности, совершаемое грузом на нити в горизонтальной плоскости. Сила тяжести, сила реакции опоры и сила натяжения нити всегда перпендикулярны скорости, и работа каждой из этих сил равна нулю в течение любого промежутка времени. Соответственно, кинетическая энергия груза (а значит, и его скорость) остаётся постоянной в процессе движения.

Задача. Автомобиль едет по горизонтальной дороге со скоростью v и начинает резко тормозить. Найти путь s, пройденный автомобилем до полной остановки, если коэффициент трения шин о дорогу равен μ.

Решение. Начальная кинетическая энергия автомобиля $K_1 = \dfrac{mv^2}{2}$, конечная кинетическая энергия $K_2 = 0$. Изменение кинетической энергии $\Delta K = K_2 - K_1 = -\dfrac{mv^2}{2}$.

На автомобиль действуют сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}$. Сила тяжести и реакция опоры, будучи перпендикулярны перемещению автомобиля, работы не совершают. Работа силы трения:

$$A = -fs = -\mu Ns = -\mu mgs.$$

Из теоремы о кинетической энергии теперь получаем:

$$\Delta K = A \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\mu mgs \Rightarrow s = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

16.5 Потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли

Рассмотрим тело массы m, находящееся на некоторой высоте над поверхностью Земли. Высоту считаем много меньше земного радиуса. Изменением силы тяжести в процессе перемещения тела пренебрегаем.

Если тело находится на высоте h, то *потенциальная энергия* тела по определению равна:

$$W = mgh,$$

где g — ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли.

Высоту не обязательно отсчитывать от поверхности Земли. Как мы увидим ниже (формулы (77), (78)), физическим смыслом обладает не сама по себе потенциальная энергия, но её *изменение*. А изменение потенциальной энергии не зависит от уровня отсчёта. Выбор нулевого уровня потенциальной энергии в конкретной задаче диктуется исключительно соображениями удобства.

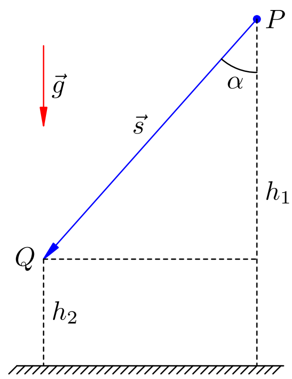

Рис. 49. $A = mg(h_1 - h_2)$

Найдём работу, совершаемую силой тяжести при перемещении тела. Предположим, что тело перемещается по прямой из точки P, находящейся на высоте h_1, в точку Q, находящуюся на высоте h_2 (рис. 49).

Угол между силой тяжести $m\vec{g}$ и перемещением тела $\vec{s}$ обозначим α. Для работы силы тяжести получим:

$$A = m\vec{g}\vec{s} = mgs\cos\alpha.$$

Но, как видно из рис. 49, $s\cos\alpha = h_1 - h_2$. Поэтому

$$A = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2,$$

или

$$A = W_1 - W_2. \tag{77}$$

Учитывая, что $W_1 - W_2 = -(W_2 - W_1) = -\Delta W$, имеем также:

$$A = -\Delta W. \tag{78}$$

Можно доказать, что формулы (77) и (78) справедливы *для любой траектории*, по которой тело перемещается из точки P в точку Q, а не только для прямолинейного отрезка.

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой перемещается тело, и равна разности значений потенциальной энергии в начальной и конечной точках траектории. Иными словами, работа силы тяжести всегда равна изменению потенциальной энергии с противоположным знаком.

В частности, работа силы тяжести по любому замкнутому пути равна нулю.

Сила называется *консервативной*, если при перемещении тела работа этой силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела. Сила тяжести, таким образом, является консервативной. Работа консервативной силы по любому замкнутому пути равна нулю. Только в случае консервативной силы возможно ввести такую величину, как потенциальная энергия.

16.6 Потенциальная энергия деформированной пружины

Рассмотрим пружину жёсткости k. Начальная деформация пружины равна x_1. Предположим, что пружина деформируется до некоторой конечной величины деформации x_2. Чему равна при этом работа силы упругости пружины?

В данном случае силу на перемещение не умножишь, так как сила упругости меняется в процессе деформации пружины. Для нахождения работы переменной силы требуется интегрирование. Мы не будем приводить здесь вывод, а сразу выпишем конечный результат.

Оказывается, сила упругости пружины также является консервативной. Её работа зависит лишь от величин x_1, x_2 и определяется формулой:

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}\,.$$

Величина

$$W = \frac{kx^2}{2}$$

называется *потенциальной энергией деформированной пружины* (x — величина деформации). Следовательно,

$$A = W_1 - W_2 = -\Delta W,$$

что полностью аналогично формулам (77) и (78).

16.7 Закон сохранения механической энергии

Консервативные силы называются так потому, что сохраняют механическую энергию замкнутой системы тел.

Механическая энергия E тела равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$E = K + W.$$

Механическая энергия системы тел равна сумме их кинетических энергий и потенциальной энергии их взаимодействия друг с другом.

Предположим, что тело совершает движение под действием силы тяжести и/или силы упругости пружины. Будем считать, что трения нет. Пусть в начальном положении кинетическая и потенциальная энергии тела равны K_1 и W_1, в конечном положении — K_2 и W_2. Работу внешних сил при перемещении тела из начального положения в конечное обозначим A.

По теореме о кинетической энергии:

$$K_2 - K_1 = A.$$

Но работа консервативных сил равна разности потенциальных энергий:

$$A = W_1 - W_2.$$

Отсюда получаем:

$$K_2 - K_1 = W_1 - W_2,$$

или

$$K_1 + W_1 = K_2 + W_2.$$

Левая и правая части данного равенства представляют собой механическую энергию тела в начальном и конечном положении:

$$E_1 = E_2.$$

Следовательно, *при движении тела в поле силы тяжести и/или на пружине механическая энергия тела остаётся неизменной при отсутствии трения.*

Справедливо и более общее утверждение.

Закон сохранения механической энергии. Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы, то механическая энергия системы сохраняется.

При этих условиях могут происходить лишь превращения энергии: из кинетической в потенциальную и наоборот. Общий запас механической энергии системы остаётся постоянным.

16.8 Закон изменения механической энергии

Если между телами замкнутой системы имеются силы сопротивления (сухое или вязкое трение), то механическая энергия системы будет уменьшаться. Так, автомобиль останавливается в результате торможения, колебания маятника постепенно затухают и т. д. Силы трения неконсервативны: работа силы трения очевидным образом зависит от пути, по которому перемещается тело между данными точками. В частности, работа силы трения по замкнутому пути не равна нулю.

Снова рассмотрим движение тела в поле силы тяжести и/или на пружине. Вдобавок на тело действует сила трения, которая за рассматриваемый промежуток времени совершает отрицательную работу $A_{\text{тр}}$. Работу консервативных сил (тяжести и упругости) по-прежнему обозначаем A.

Изменение кинетической энергии тела равно работе *всех* внешних сил:

$$K_2 - K_1 = A + A_{\text{тр}}.$$

Но $A = W_1 - W_2$, следовательно

$$K_2 - K_1 = W_1 - W_2 + A_{\text{тр}}.$$

Отсюда

$$K_2 + W_2 - (K_1 + W_1) = A_{\text{тр}},$$

или

$$E_2 - E_1 = A_{\text{тр}}.$$

В левой части стоит величина $\Delta E = E_2 - E_1$ — изменение механической энергии тела:

$$\Delta E = A_{\text{тр}}.$$

Итак, *при движении тела в поле силы тяжести и/или на пружине изменение механической энергии тела равно работе силы трения.* Так как работа силы трения отрицательна, изменение механической энергии также отрицательно: механическая энергия убывает.

Справедливо и более общее утверждение.

Закон изменения механической энергии. Изменение механической энергии замкнутой системы равно работе сил трения, действующих внутри системы.

Ясно, что закон сохранения механической энергии является частным случаем данного утверждения.

Конечно, убыль механической энергии не противоречит общефизическому закону сохранения энергии. В данном случае механическая энергия превращается в энергию теплового движения частиц вещества и их потенциальную энергию взаимодействия друг с другом, т. е. переходит во *внутреннюю энергию* тел системы.

17 Простые механизмы

Механизмом в физике называется приспособление для преобразования силы (её увеличения или уменьшения). Например, прикладывая небольшое усилие в одном месте механизма, можно получить значительно большее усилие в другом его месте.

Один вид механизма нам уже встретился: это гидравлический пресс. Здесь мы рассмотрим так называемые *простые механизмы* — рычаг и наклонную плоскость.

17.1 Рычаг

Рычаг — это твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси. На рис. 50 изображён рычаг с осью вращения O. К концам рычага (точкам A и B) приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Плечи этих сил равны соответственно l_1 и l_2.

Условие равновесия рычага даётся правилом моментов: $F_1 l_1 = F_2 l_2$, откуда

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}\,.$$

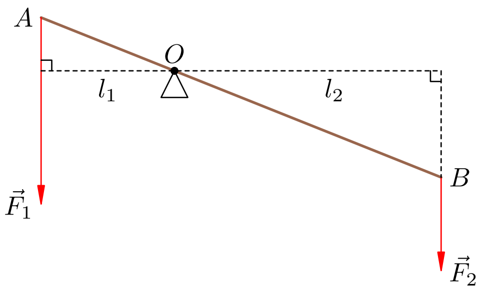

Рис. 50. Рычаг

Из этого соотношения следует, что рычаг даёт выигрыш в силе или в расстоянии (смотря по тому, с какой целью он используется) во столько раз, во сколько большее плечо длиннее меньшего.

Например, чтобы усилием 100 Н поднять груз весом 700 Н, нужно взять рычаг с отношением плеч $7 : 1$ и положить груз на короткое плечо. Мы выиграем в силе в 7 раз, но во столько же раз проиграем в расстоянии: конец длинного плеча опишет в 7 раз бóльшую дугу, чем конец короткого плеча (то есть груз).

Примерами рычага, дающего выигрыш в силе, являются лопата, ножницы, плоскогубцы. Весло гребца — это рычаг, дающий выигрыш в расстоянии. А обычные рычажные весы являются равноплечим рычагом, не дающим выигрыша ни в расстоянии, ни в силе (в противном случае их можно использовать для обвешивания покупателей).

17.2 Неподвижный блок

Важной разновидностью рычага является *блок* — укреплённое в обойме колесо с жёлобом, по которому пропущена верёвка. В большинстве задач верёвка считается невесомой нерастяжимой нитью.

На рис. 51 изображён *неподвижный блок*, т. е. блок с неподвижной осью вращения (проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку O).

На правом конце нити в точке D закреплён груз весом $\vec{P}$. Напомним, что вес тела — это сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес. В данном случае вес $\vec{P}$ приложен к точке D, в которой груз крепится к нити.

К левому концу нити в точке C приложена сила $\vec{F}$.

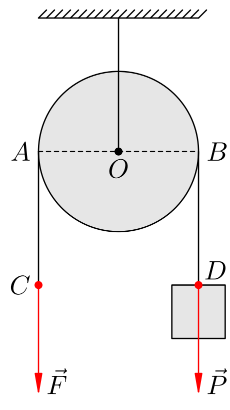

Рис. 51. Неподвижный блок

Плечо силы $\vec{F}$ равно $OA = r$, где r — радиус блока. Плечо веса $\vec{P}$ равно $OB = r$. Значит, неподвижный блок является равноплечим рычагом и потому не даёт выигрыша ни в силе, ни в расстоянии: во-первых, имеем равенство $F = P$, а во-вторых, в процессе движении груза и нити перемещение точки C равно перемещению груза.

Зачем же тогда вообще нужен неподвижный блок? Он полезен тем, что позволяет *изменить направление усилия*. Обычно неподвижный блок используется как часть более сложных механизмов.

17.3 Подвижный блок

На рис. 52 изображён *подвижный блок*, ось которого перемещается вместе с грузом. Мы тянем за нить с силой $\vec{F}$, которая приложена в точке C и направлена вверх. Блок вращается и при этом также движется вверх, поднимая груз, подвешенный на нити OD.

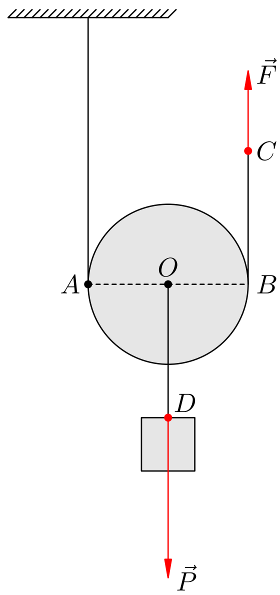

Рис. 52. Подвижный блок

В данный момент времени неподвижной точкой является точка A, и именно вокруг неё поворачивается блок (он бы «перекатывается» через точку A). Говорят ещё, что через точку A проходит *мгновенная ось вращения* блока (эта ось направлена перпендикулярно плоскости рисунка).

Вес груза $\vec{P}$ приложен в точке D крепления груза к нити. Плечо силы $\vec{P}$ равно $AO = r$.

А вот плечо силы $\vec{F}$, с которой мы тянем за нить, оказывается в два раза больше: оно равно $AB = 2r$. Соответственно, условием равновесия груза является равенство $F = P/2$ (что мы и видим на рис. 52: длина вектора $\vec{F}$ в два раза меньше длины вектора $\vec{P}$).

Следовательно, *подвижный блок даёт выигрыш в силе в два раза*. При этом, однако, мы в те же два раза проигрываем в расстоянии. Действительно, нетрудно сообразить, что для поднятия груза на один метр точку C придётся переместить вверх на два метра (то есть вытянуть два метра нити).

У блока на рис. 52 есть один недостаток: тянуть нить вверх (за точку C) — не самая лучшая идея. Согласитесь, что гораздо удобнее тянуть за нить вниз! Вот тут-то нас и выручает неподвижный блок.

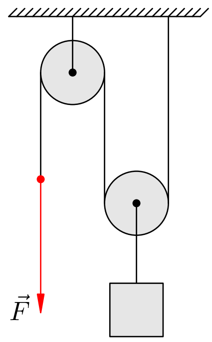

Рис. 53. Комбинация блоков

На рис. 53 изображён подъёмный механизм, который представляет собой комбинацию подвижного блока с неподвижным. К подвижному блоку подвешен груз, а трос дополнительно перекинут через неподвижный блок, что даёт возможность тянуть за трос *вниз* для подъёма груза *вверх*. Внешнее усилие на тросе снова обозначено вектором $\vec{F}$.

Принципиально данное устройство ничем не отличается от подвижного блока: с его помощью мы также получаем двукратный выигрыш в силе.

17.4 Наклонная плоскость

Как мы знаем, тяжёлую бочку проще вкатить по наклонным мосткам, чем поднимать вертикально. Мостки, таким образом, являются механизмом, который даёт выигрыш в силе.

В механике подобный механизм называется *наклонной плоскостью*. Наклонная плоскость — это ровная плоская поверхность, расположенная под некоторым углом α к горизонту. В таком случае коротко говорят: «наклонная плоскость с углом α».

Найдём силу, которую надо приложить к грузу массы m, чтобы равномерно поднять его по *гладкой* наклонной плоскости с углом α. Эта сила $\vec{F}$, разумеется, направлена вдоль наклонной плоскости (рис. 54).

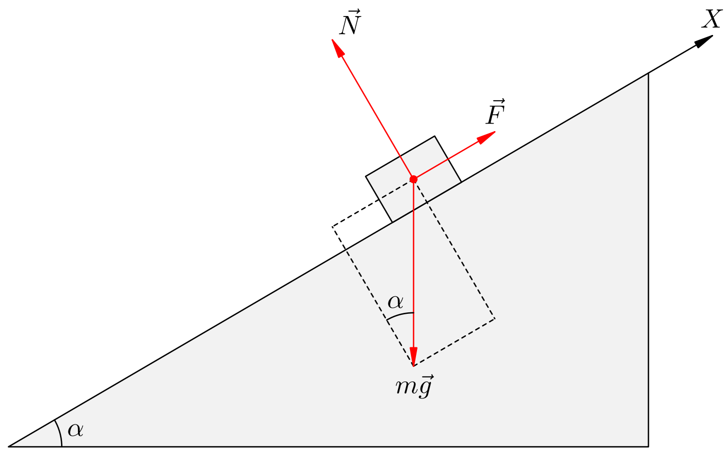

Рис. 54. Гладкая наклонная плоскость

Выберем ось X так, как показано на рисунке. Поскольку груз движется без ускорения, действующие на него силы уравновешены:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}.$$

Проектируем на ось X:

$$-mg \sin\alpha + F = 0,$$

откуда

$$F = mg \sin\alpha.$$

Именно такую силу нужно приложить, что двигать груз вверх по наклонной плоскости.

Чтобы равномерно поднимать тот же груз по вертикали, к нему нужно приложить силу, равную mg. Видно, что $F < mg$, поскольку $\sin\alpha < 1$. Наклонная плоскость действительно даёт выигрыш в силе, и тем больший, чем меньше угол α.

Широко применяемыми разновидностями наклонной плоскости являются *клин* и *винт*.

17.5 Золотое правило механики

Простой механизм может дать выигрыш в силе или в расстоянии, но не может дать выигрыша в работе.

Например, рычаг с отношением плеч $2 : 1$ даёт выигрыш в силе в два раза. Чтобы на меньшем плече поднять груз весом P, нужно к большему плечу приложить силу $P/2$. Но для поднятия груза на высоту h большее плечо придётся опустить на $2h$, и совершённая работа будет равна

$$A = \frac{P}{2} \cdot 2h = Ph,$$

т. е. той же величине, что и без использования рычага.

В случае наклонной плоскости мы выигрываем в силе, так как прикладываем к грузу силу $F = mg \sin\alpha$, меньшую силы тяжести. Однако, чтобы поднять груз на высоту h над начальным положением, нам нужно пройти путь $l = h/\sin\alpha$ вдоль наклонной плоскости. При этом мы совершаем работу

$$A = mg \sin\alpha \frac{h}{\sin\alpha} = mgh,$$

т. е. ту же самую, что и при вертикальном поднятии груза.

Данные факты служат проявлениями так называемого *золотого правила механики*.

Золотое правило механики. Ни один из простых механизмов не даёт выигрыша в работе. Во сколько раз выигрываем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии, и наоборот.

Золотое правило механики есть не что иное, как простой вариант закона сохранения энергии.

17.6 КПД механизма

На практике приходится различать *полезную работу* $A_{\text{полезн}}$, которую нужно совершить при помощи механизма в идеальных условиях отсутствия каких-либо потерь, и *полную работу* $A_{\text{полн}}$, которая совершается для тех же целей в реальной ситуации.

Полная работа равна сумме:

- полезной работы;
- работы, совершённой против сил трения в различных частях механизма;
- работы, совершённой по перемещению составных элементов механизма.

Так, при подъёме груза рычагом приходится вдобавок совершать работу по преодолению силы трения в оси рычага и по перемещению самого рычага, имеющего некоторый вес.

Полная работа всегда больше полезной. Отношение полезной работы к полной называется *коэффициентом полезного действия (КПД) механизма*:

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{полн}}}\,.$$

КПД принято выражать в процентах. КПД реальных механизмов всегда меньше 100%.

Вычислим КПД наклонной плоскости с углом α при наличии трения. Коэффициент трения между поверхностью наклонной плоскости и грузом равен μ.

Пусть груз массы m равномерно поднимается вдоль наклонной плоскости под действием силы $\vec{F}$ из точки P в точку Q на высоту h (рис. 55). В направлении, противоположном перемещению, на груз действует сила трения скольжения $\vec{f}$.

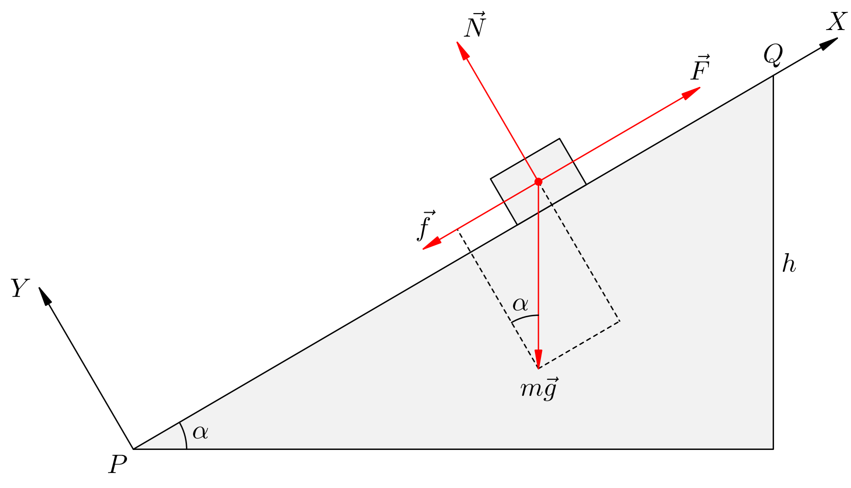

Рис. 55. Наклонная плоскость с трением

Ускорения нет, поэтому силы, действующие на груз, уравновешены:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}.$$

Проектируем на ось X:

$$- mg\sin\alpha + F - f = 0. \tag{79}$$

Проектируем на ось Y:

$$- mg\cos\alpha + N = 0. \tag{80}$$

Кроме того,

$$f = \mu N. \tag{81}$$

Из (80) имеем:

$$N = mg\cos\alpha.$$

Тогда из (81):

$$f = \mu mg\cos\alpha.$$

Подставляя это в (79), получаем:

$$F = mg\sin\alpha + f = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Полная работа равна произведению силы F на путь, пройденный телом вдоль поверхности наклонной плоскости:

$$A_{\text{полн}} = F \cdot PQ = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,\frac{h}{\sin\alpha} = mgh(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha).$$

Полезная работа, очевидно, равна:

$$A_{\text{полезн}} = mgh.$$

Для искомого КПД получаем:

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{полн}}} = \frac{mgh}{mgh(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha)} = \frac{1}{1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha}\,.$$

18 Механические колебания

Колебания — это повторяющиеся во времени изменения состояния системы. Понятие колебаний охватывает очень широкий круг явлений.

Колебания механических систем, или *механические колебания* — это механическое движение тела или системы тел, которое обладает повторяемостью во времени и происходит в окрестности положения равновесия. *Положением равновесия* называется такое состояние системы, в котором она может оставаться сколь угодно долго, не испытывая внешних воздействий.

Например, если маятник отклонить и отпустить, то начнутся колебания. Положение равновесия — это положение маятника при отсутствии отклонения. В этом положении маятник, если его не трогать, может пребывать сколь угодно долго. При колебаниях маятник много раз проходит положение равновесия.

Сразу после того, как отклонённый маятник отпустили, он начал двигаться, прошёл положение равновесия, достиг противоположного крайнего положения, на мгновение остановился в нём, двинулся в обратном направлении, снова прошёл положение равновесия и вернулся назад. Совершилось одно *полное колебание*. Дальше этот процесс будет периодически повторяться.

Амплитуда колебаний тела — это величина его наибольшего отклонения от положения равновесия.

Период колебаний T — это время одного полного колебания. Можно сказать, что за период тело проходит путь в четыре амплитуды.

Частота колебаний ν — это величина, обратная периоду: $\nu = 1/T$. Частота измеряется в герцах (Гц) и показывает, сколько полных колебаний совершается за одну секунду.

18.1 Гармонические колебания

Будем считать, что положение колеблющегося тела определяется одной-единственной координатой x. Положению равновесия отвечает значение $x = 0$. Основная задача механики в данном случае состоит в нахождении функции $x(t)$, дающей координату тела в любой момент времени.

Для математического описания колебаний естественно использовать периодические функции. Таких функций много, но две из них — синус и косинус — являются самыми важными. У них много хороших свойств, и они тесно связаны с широким кругом физических явлений.

Поскольку функции синус и косинус получаются друг из друга сдвигом аргумента на $\pi/2$, можно ограничиться только одной из них. Мы для определённости будем использовать косинус.

Гармонические колебания — это колебания, при которых координата зависит от времени по *гармоническому закону*:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha). \tag{82}$$

Выясним смысл входящих в эту формулу величин.

Положительная величина A является наибольшим по модулю значением координаты (так как максимальное значение модуля косинуса равно единице), т. е. наибольшим отклонением от положения равновесия. Поэтому A — амплитуда колебаний.

Аргумент косинуса $\omega t + \alpha$ называется *фазой* колебаний. Величина α, равная значению фазы при $t = 0$, называется *начальной фазой*. Начальная фаза отвечает начальной координате тела: $x_0 = A\cos\alpha$.

Величина ω называется *циклической частотой*. Найдём её связь с периодом колебаний T и частотой ν. Одному полному колебанию отвечает приращение фазы, равное 2π радиан: $\omega T = 2\pi$, откуда

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{83}$$

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{84}$$

Измеряется циклическая частота в рад/с (радиан в секунду).

В соответствии с выражениями (83) и (84) получаем ещё две формы записи гармонического закона (82):

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right), \quad x = A\cos(2\pi\nu t + \alpha).$$

График функции (82), выражающей зависимость координаты от времени при гармонических колебаниях, приведён на рис. 56.

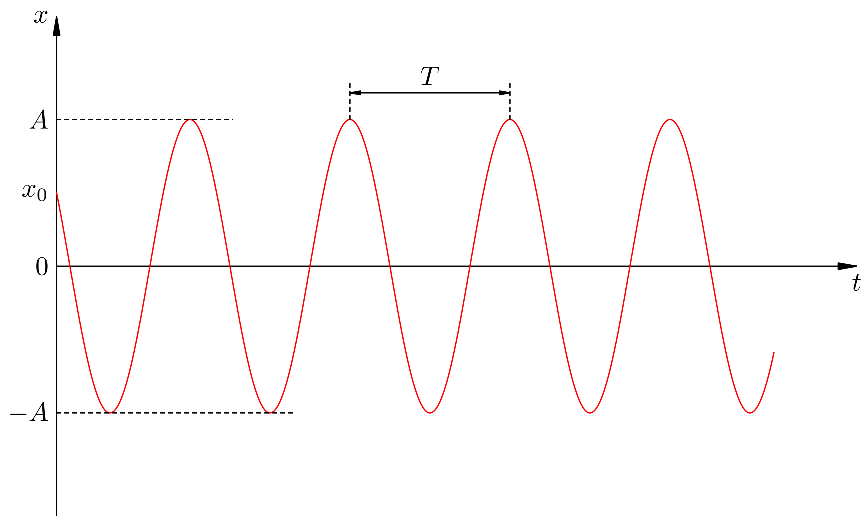

Рис. 56. График гармонических колебаний

Гармонический закон вида (82) носит самый общий характер. Он отвечает, например, ситуации, когда с маятником совершили одновременно два начальных действия: отклонили на величину x_0 и придали ему некоторую начальную скорость. Имеются два важных частных случая, когда одно из этих действий не совершалось.

Пусть маятник отклонили, но начальной скорости не сообщали (отпустили без начальной скорости). Ясно, что в этом случае $x_0 = A$, поэтому можно положить $\alpha = 0$. Мы получаем *закон косинуса*:

$$x = A\cos\omega t.$$

График гармонических колебаний в этом случае представлен на рис. 57.

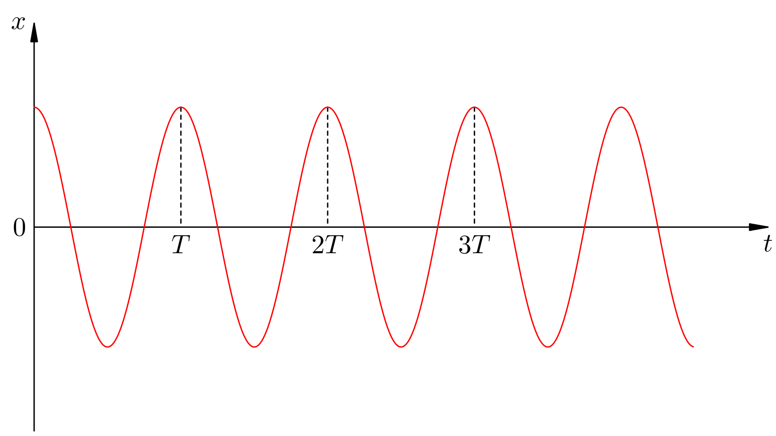

Рис. 57. Закон косинуса

Допустим теперь, что маятник не отклоняли, но ударом сообщили ему начальную скорость из положения равновесия. В этом случае $x_0 = 0$, так что можно положить $\alpha = -\pi/2$. Получаем *закон синуса*:

$$x = A \sin \omega t.$$

График колебаний представлен на рис. 58.

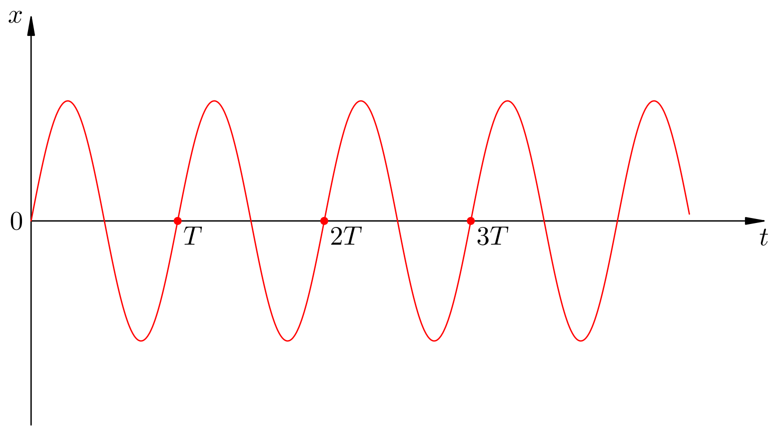

Рис. 58. Закон синуса

18.2 Уравнение гармонических колебаний

Вернёмся к общему гармоническому закону (82). Дифференцируем это равенство:

$$v_x = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha). \tag{85}$$

Теперь дифференцируем полученное равенство (85):

$$a_x = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha). \tag{86}$$

Давайте сопоставим выражение (82) для координаты и выражение (86) для проекции ускорения. Мы видим, что проекция ускорения отличается от координаты лишь множителем $-\omega^2$:

$$a_x = -\omega^2 x. \tag{87}$$

Это соотношение называется *уравнением гармонических колебаний*. Его можно переписать и в таком виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{88}$$

С математической точки зрения уравнение (88) является *дифференциальным уравнением*. Решениями дифференциальных уравнений служат функции (а не числа, как в обычной алгебре). Так вот, можно доказать, что:

- решением уравнения (88) является всякая функция вида (82) с произвольными A и α;
- никакая другая функция решением данного уравнения не является.

Иными словами, соотношения (87), (88) описывают гармонические колебания с циклической частотой ω и только их. Две константы A и α определяются из начальных условий — по начальным значениям координаты и скорости.

18.3 Пружинный маятник

Пружинный маятник — это закреплённый на пружине груз, способный совершать колебания в горизонтальном или вертикальном направлении.

Найдём период малых горизонтальных колебаний пружинного маятника (рис. 59). Колебания будут *малыми*, если величина деформации пружины много меньше её размеров. При малых деформациях мы можем пользоваться законом Гука. Это приведёт к тому, что колебания окажутся гармоническими.

Трением пренебрегаем. Груз имеет массу m, жёсткость пружины равна k.

Координате $x = 0$ отвечает положение равновесия, в котором пружина не деформирована. Следовательно, величина деформации пружины равна модулю координаты груза.

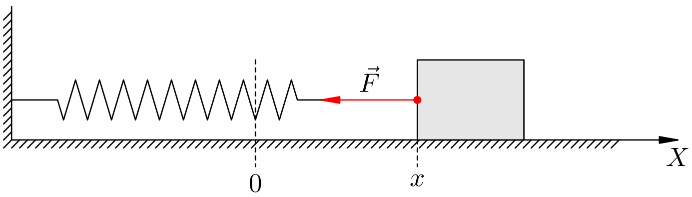

Рис. 59. Пружинный маятник

В горизонтальном направлении на груз действует только сила упругости $\vec{F}$ со стороны пружины. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось X имеет вид:

$$ma_x = F_x\,. \tag{89}$$

Если $x > 0$ (груз смещён вправо, как на рисунке), то сила упругости направлена в противоположную сторону, и $F_x < 0$. Наоборот, если $x < 0$, то $F_x > 0$. Знаки x и F_x всё время противоположны, поэтому закон Гука можно записать так:

$$F_x = -kx.$$

Тогда соотношение (89) принимает вид:

$$ma_x = -kx$$

или

$$a_x = -\frac{k}{m}\,x.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний вида (87), в котором

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\,.$$

Циклическая частота колебаний пружинного маятника, таким образом, равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{90}$$

Отсюда и из соотношения $T = 2\pi/\omega$ находим период горизонтальных колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{91}$$

Если подвесить груз на пружине, то получится пружинный маятник, совершающий колебания в вертикальном направлении. Можно показать, что и в этом случае для периода колебаний справедлива формула (91).

18.4 Математический маятник

Математический маятник — это небольшое тело, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити (рис. 60). Математический маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости в поле силы тяжести.

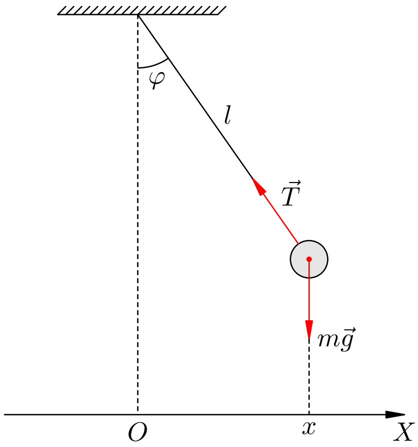

Рис. 60. Математический маятник

Найдём период малых колебаний математического маятника. Длина нити равна l. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Запишем для маятника второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T},$$

и спроектируем его на ось X:

$$ma_x = T_x\,.$$

Если маятник занимает положение как на рисунке (т. е. $x > 0$), то:

$$T_x = -T\sin\varphi = -T\,\frac{x}{l}\,.$$

Если же маятник находится по другую сторону от положения равновесия (т. е. $x < 0$), то:

$$T_x = T\sin\varphi = -T\,\frac{x}{l}\,.$$

Итак, при любом положении маятника имеем:

$$ma_x = -T\,\frac{x}{l}\,. \tag{92}$$

Когда маятник покоится в положении равновесия, выполнено равенство $T = mg$. При малых колебаниях, когда отклонения маятника от положения равновесия малы (по сравнению с длиной нити), выполнено приближённое равенство $T \approx mg$. Воспользуемся им в формуле (92):

$$ma_x = -mg\,\frac{x}{l}\,,$$

или

$$a_x = -\frac{g}{l}\,x.$$

Это — уравнение гармонических колебаний вида (87), в котором

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\,.$$

Следовательно, циклическая частота колебаний математического маятника равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{93}$$

Отсюда период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{94}$$

Обратите внимание, что в формулу (94) не входит масса груза. В отличие от пружинного маятника, период колебаний математического маятника не зависит от его массы.

18.5 Свободные и вынужденные колебания

Говорят, что система совершает *свободные колебания*, если она однократно выведена из положения равновесия и в дальнейшем предоставлена сама себе. Никаких периодических внешних воздействий система при этом не испытывает, и никаких внутренних источников энергии, поддерживающих колебания, в системе нет.

Рассмотренные выше колебания пружинного и математического маятников являются примерами свободных колебаний.

Частота, с которой совершаются свободные колебания, называется *собственной частотой* колебательной системы. Так, формулы (90) и (93) дают собственные (циклические) частоты колебаний пружинного и математического маятников.

В идеализированной ситуации при отсутствии трения свободные колебания являются *незатухающими*, т. е. имеют постоянную амплитуду и длятся неограниченно долго. В реальных колебательных системах всегда присутствует трение, поэтому свободные колебания постепенно затухают (рис. 61).

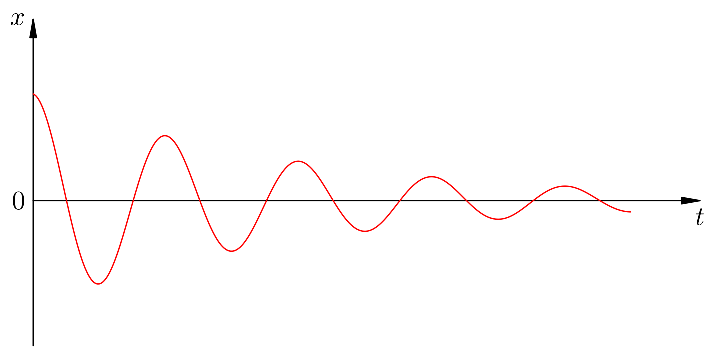

Рис. 61. Затухающие колебания

Вынужденные колебания — это колебания, совершаемые системой под воздействием внешней силы $F(t)$, периодически изменяющейся во времени (так называемой *вынуждающей силы*).

Предположим, что собственная частота колебаний системы равна ω_0, а вынуждающая сила зависит от времени по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t\,.$$

В течение некоторого времени происходит установление вынужденных колебаний: система совершает сложное движение, которое является наложением выужденных и свободных колебаний. Свободные колебания постепенно затухают, и в установившемся режиме система совершает вынужденные колебания, которые также оказываются гармоническими. *Частота установившихся вынужденных колебаний совпадает с частотой ω вынуждающей силы* (внешняя сила как бы навязывает системе свою частоту).

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы. График этой зависимости показан на рис. 62.

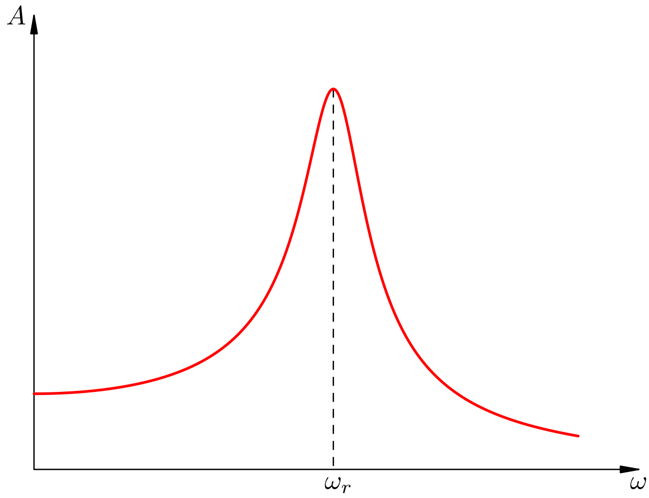

Рис. 62. Резонанс

Мы видим, что вблизи частоты $\omega = \omega_r$ наступает *резонанс* — явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний. Резонансная частота приближённо равна собственной частоте колебаний системы: $\omega_r \approx \omega_0$, и это равенство выполняется тем точнее, чем меньше трение в системе. При отсутствии трения резонансная частота совпадает с собственной частотой колебаний, $\omega_r = \omega_0$, а амплитуда колебаний возрастает до бесконечности при $\omega \to \omega_0$.

19 Механические волны

Механические волны — это процесс распространения в пространстве колебаний частиц упругой среды (твёрдой, жидкой или газообразной).

Наличие у среды упругих свойств является необходимым условием распространения волн: деформация, возникающая в каком-либо месте, благодаря взаимодействию соседних частиц последовательно передаётся от одной точки среды к другой. Различным типам деформаций будут соответствовать разные типы волн.

19.1 Продольные и поперечные волны

Волна называется *продольной*, если частицы среды колеблются параллельно направлению распространения волны. Продольная волна состоит из чередующихся деформаций растяжения и сжатия. На рис. 63 показана продольная волна, представляющая собой колебания плоских слоёв среды; направление, вдоль которого колеблются слои, совпадает с направлением распространения волны (т. е. перпендикулярно слоям).

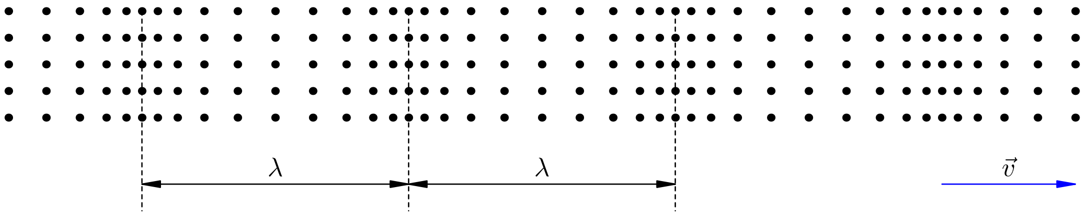

Рис. 63. Продольная волна

Волна называется *поперечной*, если частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны. Поперечная волна вызывается деформациями сдвига одного слоя среды относительно другого. На рис. 64 каждый слой колеблется вдоль самого себя, а волна идёт перпендикулярно слоям.

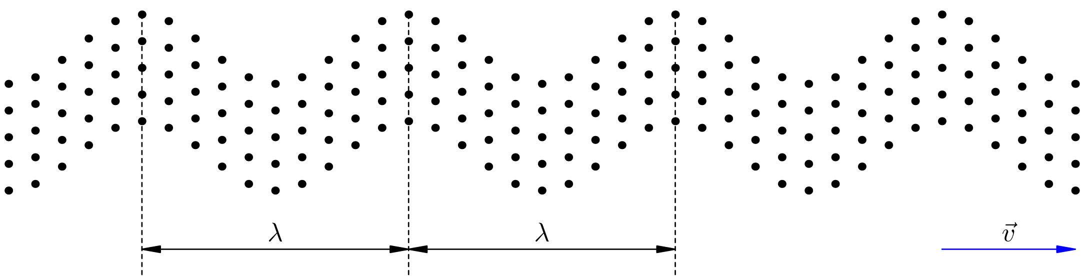

Рис. 64. Поперечная волна

Продольные волны могут распространяться в твёрдых телах, жидкостях и газах: во всех этих средах возникает упругая реакция на сжатие, в результате которой появятся бегущие друг за другом сжатия и разрежения среды.

Однако жидкости и газы, в отличие от твёрдых тел, не обладают упругостью по отношению к сдвигу слоёв. Поэтому поперечные волны могут распространяться в твёрдых телах, но не внутри жидкостей и газов[7].

[7]На поверхности жидкости могут существовать волны особого типа, похожие на поперечные — так называемые *поверхностные волны*. Они возникают под действием силы тяжести и силы поверхностного натяжения.

Важно отметить, что частицы среды при прохождении волны совершают колебания вблизи неизменных положений равновесия, т. е. в среднем остаются на своих местах. Волна, таким образом, осуществляет *перенос энергии, не сопровождающийся переносом вещества*.

Наиболее просты для изучения *гармонические волны*. Они вызываются внешним воздействием на среду, меняющимся по гармоническому закону. При распространении гармонической волны частицы среды совершают гармонические колебания с частотой, равной частоте внешнего воздействия. Гармоническими волнами мы в дальнейшем и ограничимся.

Рассмотрим процесс распространения волны более подробно.

Допустим, что некоторая частица среды (частица 1) начала совершать колебания с периодом T. Действуя на соседнюю частицу 2, она потянет её за собой. Частица 2, в свою очередь, потянет за собой частицу 3 и т. д. Так возникнет волна, в которой все частицы будут совершать колебания с периодом T.

Однако частицы имеют массу, т. е. обладают инертностью. На изменение их скорости требуется некоторое время. Следовательно, частица 2 в своём движении будет несколько отставать от частицы 1, частица 3 будет отставать от частицы 2 и т. д. Когда частица 1 спустя время T завершит первое колебание и начнёт второе, своё первое колебание начнёт частица $N+1$, находящаяся от частицы 1 на некотором расстоянии λ.

Итак, за время, равное периоду колебаний частиц, возмущение среды распространяется на расстояние λ. Это расстояние называется *длиной волны*. Колебания частицы $N+1$ будут идентичны колебаниям частицы 1, колебания следующей частицы $N+2$ будут идентичны колебаниям частицы 2 и т. д. Колебания как бы воспроизводят себя на расстоянии λ. Поэтому длину волны λ можно назвать *пространственным периодом* колебаний; наряду с временны́м периодом T она является важнейшей характеристикой волнового процесса.

В продольной волне длина волны равна расстоянию между соседними сжатиями или разрежениями (рис. 63). В поперечной — расстоянию между соседними горбами или впадинами (рис. 64). Вообще, длина волны равна расстоянию (вдоль направления распространения волны) между двумя ближайшими частицами среды, колеблющимися *одинаково* (т. е. с разностью фаз, равной 2π).

Скоростью распространения волны называется отношение длины волны к периоду колебаний частиц среды:

$$v = \frac{\lambda}{T}\,.$$

Частотой волны называется частота колебаний частиц:

$$\nu = \frac{1}{T}\,.$$

Отсюда получаем связь скорости волны, длины волны и частоты:

$$v = \lambda\nu. \tag{95}$$

19.2 Звук

Звуковыми волнами в широком смысле называются всякие волны, распространяющиеся в упругой среде. В узком смысле *звуком* называют звуковые волны в диапазоне частот от 16 Гц до 20 кГц, воспринимаемые человеческим ухом. Ниже этого диапазона лежит область *инфразвука*, выше — область *ультразвука*.

К основным характеристикам звука относятся *громкость* и *высота*.

Громкость звука определяется амплитудой колебаний давления в звуковой волне и измеряется в специальных единицах — *децибелах* (дБ). Так, громкость 0 дБ является порогом слышимости, 10 дБ — тиканье часов, 50 дБ — обычный разговор, 80 дБ — крик, 130 дБ — верхняя граница слышимости (так называемый *болевой порог*).

Тон — это звук, который издаёт тело, совершающее гармонические колебания (например, камертон или струна). Высота тона определяется частотой этих колебаний: чем выше частота, тем выше нам кажется звук. Так, натягивая струну, мы увеличиваем частоту её колебаний и, соответственно, высоту звука.

Скорость звука в разных средах различна: чем более упругой является среда, тем быстрее в ней распространяется звук. В жидкостях скорость звука больше, чем в газах, а в твёрдых телах — больше, чем в жидкостях.

Например, скорость звука в воздухе при 0 °C равна примерно 340 м/с (её удобно запомнить как «треть километра в секунду»)[8]. В воде звук распространяется со скоростью около 1500 м/с, а в стали — около 5000 м/с.

Заметим, что *частота* звука от данного источника во всех средах одна и та же: частицы среды совершают вынужденные колебания с частотой источника звука. Согласно формуле (95) заключаем тогда, что при переходе из одной среды в другую наряду со скоростью звука изменяется длина звуковой волны.

[8] Если хочешь найти расстояние до грозовых туч в километрах, посчитай, через сколько секунд после молнии придёт гром, и раздели полученное число на три.