Магнитный диполь

Причиной написания данного листка послужили две задачи:

- How are aurora ignited by the solar wind? (APhO, 2015);
- Space Debris (APhO, 2017).

В обеих задачах фигурирует дипольное магнитное поле Земли. Поэтому хотелось бы подробнее разобраться с формулой для магнитного поля, создаваемого магнитным диполем.

Магнитный диполь — это маленький плоский виток с током; размеры витка много меньше расстояния, на котором наблюдается его магнитное поле.

Магнитный диполь оказывается аналогом электрического диполя: вы сейчас увидите, что формулы, описывающие магнитное поле витка или воздействие внешнего магнитного поля на виток, имеют тот же самый вид, что и соответствующие формулы для электрического поля диполя или действия внешнего электрического поля на диполь (с заменой дипольного момента на магнитный момент, а электрического поля — на магнитное).

Для начала вспомним один из основных законов магнитостатики, а именно закон Био — Савара — Лапласа.

Закон Био — Савара — Лапласа. Пусть есть тонкий провод, по которому течёт ток I. Рассмотрим бесконечно малый элемент провода длиной dl и будем воспринимать его как вектор $d\vec{l}$, направление которого совпадает с направлением тока. Тогда вектор магнитной индукции $d\vec{B}$, создаваемый этим элементом, равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3},$$

где $\vec{r}$ есть радиус-вектор, проведённый от нашего элемента провода в точку наблюдения.

Задача 1. Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечного прямого провода, по которому течёт ток I.

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где r — расстояние до провода

Задача 2. По кольцу радиуса R течёт ток I. Определите индукцию магнитного поля в центре кольца и на его оси на расстоянии h от центра кольца.

$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$, $B(h) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+h^2)^{3/2}}$

Задача 3. Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в центре кольца с током, если его согнуть под углом α? Ток в кольце не меняется.

$B = B_0 \sin\frac{\alpha}{2}$

Задача 4. Пусть имеется плоский контур с током I. Нас интересует магнитное поле $\vec{B}$ этого тока в некоторой точке P плоскости контура.

- Покажите, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости контура.
- Пусть контур задан уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат с началом P. Покажите, что $|d\vec{l} \times \vec{r}| = r^2 d\varphi$, и поэтому закон Био — Савара — Лапласа примет вид

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\, d\varphi.$$

Задача 5. [Овчинкин] — 5.1, 5.2, 5.3.

Теперь, пользуясь законом Био — Савара — Лапласа, мы хотим получить выражение для индукции магнитного поля, создаваемого магнитным диполем:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}\right), \tag{1}$$

где $\vec{\mu}$ — магнитный момент диполя. Она полностью аналогична формуле для напряжённости электрического поля, создаваемого электрическим диполем:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right), \tag{2}$$

получать которую вы умеете (листок «Электрический диполь»). Однако аналогичный «лобовой» вывод формулы (1) наталкивается на некоторые технические трудности, поэтому мы используем обходной манёвр, который полезно предварительно осмыслить на примере альтернативного вывода формулы (2).

Задача 6. Прочитайте в Сивухине §4 «Электрический диполь» (с. 22 — 26). Детально разберитесь с выводом формулы (2).

Теперь нам предстоит применить аналогичную идею в магнитном случае[1]. Рассмотрим прямоугольный контур со сторонами a и b, по которому течёт ток I. Точка наблюдения находится на расстоянии $r \gg a, b$ от контура. Для краткости обозначаем $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ (по аналогии с электростатикой).

Задача 7. Пусть точка наблюдения P расположена на прямой, проходящей через центр O прямоугольника перпендикулярно его плоскости (то есть на оси магнитного момента). Найдите поля, создаваемые всеми четырьмя сторонами прямоугольника. Сложив их, покажите, что

$$\vec{B} = \frac{2k\vec{\mu}}{r^3}\,.$$

[1]В Сивухине этого уже нет, поэтому настраивайтесь на самостоятельную работу.

Задача 8. Пусть точка наблюдения Q находится в плоскости контура на продолжении средней линии прямоугольника. Найдите поля, создаваемые всеми четырьмя сторонами. Сложив их, покажите, что

$$\vec{B} = -\frac{k\vec{\mu}}{r^3}\,.$$

Убедитесь, что если немного «пошевелить» точку Q, то это не повлияет на ответ (достаточно интуитивного понимания данного факта; сравните с замечанием Сивухина сразу после формулы (4.2) на с. 23).

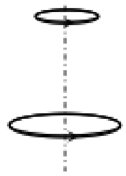
Задача 9. Пусть точка наблюдения лежит в плоскости POQ. Действуя аналогично Сивухину (опуская перпендикуляр на линию наблюдения и помещая в его основание два тока $\pm I$), сведите задачу к двум рассмотренным частным случаям и получите формулу (1).

Обратите внимание, что если у Сивухина равенство $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ очевидно, то в нашем случае аналогичное равенство $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ ещё надо доказать. Сделайте это.

Задача 10. Рассмотрим теперь произвольный магнитный диполь. Разбивая его нужным образом на маленькие прямоугольники, объясните, почему формула (1) остаётся верной и в общем случае[2].

Задача 11. Найдите опечатку в формуле (1) условия задачи «How are aurora ignited by the solar wind?» (APhO, 2015).

Задача 12. (*«Росатом», 2018, 11*) Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.



$$\boxed{F = 6\pi\mu_0 I^2 \frac{R^4}{d^4}}$$

Задача 13. [Овчинкин] — 5.17, 5.18, 5.19. Обратите внимание на содержательное сходство этих задач и задания C.1 из «Space Debris» — везде нужно вычислять интегрированием магнитный момент непрерывного распределения токов.

Задача 14. Магнитный диполь расположен во внешнем *однородном* магнитном поле $\vec{B}$.

- Покажите, что на диполь действует вращающий момент

$$\vec{\mathscr{M}} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

  Убедитесь, что этот вращающий момент стремится совместить магнитный момент по направлению с внешним полем $\vec{B}$.

- Покажите, что потенциальная энергия магнитного диполя

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

  если за ноль принять энергию диполя в положении, когда магнитный момент перпендикулярен полю.

[2]Формулу (1) принято выводить дифференцированием векторного потенциала (см., например, Фейнмановские лекции по физике, с. 287 — 290). Но вы, наверное, пока не знаете, что такое векторный потенциал, поэтому здесь мы попробовали обойтись законом Био — Савара — Лапласа.

Задача 15. Найдите частоту крутильных колебаний магнитного диполя в однородном магнитном поле B. Момент инерции диполя относительно оси вращения равен J.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\mu B}{J}}}$$

Задача 16. Теперь магнитный диполь расположен во внешнем *неоднородном* магнитном поле. Покажите, что со стороны поля на него действует сила

$$\vec{F} = \mu_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B}.$$

Достаточно это сделать для какого-либо простого частного случая.