Массивная пружина

Во всех задачах считается, что:

- недеформированная пружина однородна, то есть её линейная плотность постоянна;
- число витков пружины очень велико.

Задача 1. К концам пружины жёсткости k, расположенной на гладком горизонтальном столе, приложены силы F_1 и F_2, направленные вдоль пружины в разные стороны. Найдите деформацию пружины.

Указание. Рассмотрим два подхода к решению этой ключевой задачи.

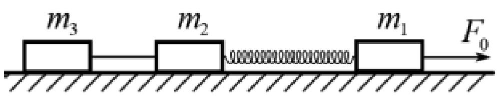
1. *Дискретный подход: суммирование.* Обозначим N — число витков пружины, m_1 — масса одного витка, k_1 — его жёсткость, Δx_i — деформация i-го витка. Пишем второй закон Ньютона для всей пружины и для участка первых $i-1$ витков. Выражаем оттуда Δx_i и суммируем по i. Учитываем, что $N \gg 1$.
2. *Непрерывный подход: интегрирование.* Пусть ℓ — длина пружины. Берём на расстоянии x от конца пружины малый кусочек длиной dx. Пусть масса кусочка равна dm, его жёсткость — k_1. Обозначим δx деформацию кусочка. Пишем второй закон Ньютона для всей пружины и для участка длиной x. Выражаем оттуда δx и интегрируем от нуля до ℓ.

$\boxed{\Delta\ell = \frac{F_1+F_2}{2k}}$

Задача 2. [Овчинкин] → 2.59.

Задача 3. [Овчинкин] → 2.60.

Задача 4. (*«Физтех», 2018, 11*) На гладкой горизонтальной поверхности стола находятся три бруска, соединённые лёгкой нитью и пружиной жёсткостью $k = 22$ Н/м (см. рис.). Масса пружины $m = 0{,}2$ кг и равномерно распределена вдоль оси ненапряжённой пружины. Массы брусков $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$. Под действием горизонтальной силы $F_0 = 2{,}1$ Н, приложенной к бруску m_1, система движется по столу. При этом длина пружины увеличивается на 30% по сравнению с длиной ненапряжённой пружины.



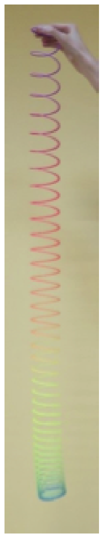
1) Найти ускорение системы.
2) Найти силу T натяжения нити.
3) Найти длину L_0 нерастянутой пружины.

$\boxed{1)\ a = \frac{F_0}{7m} = 1{,}5\ \text{м/с}^2;\ 2)\ T = \frac{3}{7}F_0 = 0{,}9\ \text{Н};\ 3)\ L_0 = \frac{55}{21}\frac{F_0}{k} = 25\ \text{см}}$

Задача 5. Масса пружины равна m, длина — ℓ, жёсткость — k. Пружину подвесили к потолку, и она удлинилась под действием собственного веса. Найдите новую длину пружины и высоту её центра масс над нижним концом.

$\boxed{\ell' = \ell + \frac{mg}{2k};\ h_c = \frac{\ell}{2} + \frac{mg}{6k}}$

Задача 6. (*Всеросс., 2017, ЗЭ, 11*) Пружину «слинки» удерживают за верхний виток так, что её нижний виток находится на высоте $h = 1$ м над уровнем пола, а длина самой пружины, растянутой силой собственного веса, равна $l = 1{,}5$ м. Пружину отпускают. Через какое время τ она упадёт на пол? В нерастянутом состоянии витки пружины плотно прилегают друг к другу, не оказывая при этом давления друг на друга, а длина пружины составляет $l_0 = 6$ см. Витки тонкие. При схлопывании пружины витки между собой соударяются неупруго, и к моменту падения она успевает схлопнуться. Ответ дать с точностью 0,02 с.



$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2}{g}\left(h + \frac{l}{3}\right)} = 0{,}55 \text{ с}}$$

При вычислении кинетической энергии колеблющейся пружины обычно делается предположение о том, что *в каждый момент времени пружина деформирована равномерно*. Разумеется, это всего лишь приближение, которое сильно упрощает вычисления[1]. Насчёт законности использования данного приближения смотрите книгу Курта Магнуса «Колебания» (с. 51).

Задача 7. [Овчинкин] → 4.52.

Задача 8. [Овчинкин] → 4.137.

Задача 9. (*Всеросс., 1997, ЗЭ, 11*) Горизонтально расположенная упругая пружина массой M под действием силы, равной её весу Mg, растягивается (или сжимается) на величину Δx_0.

1) Чему будет равно удлинение данной пружины, если её подвесить за один конец (без груза)?

2) Чему будет равен период колебаний груза массой m, скреплённого с одним из концов данной пружины, если второй конец пружины неподвижен, а груз скользит по гладкой горизонтальной поверхности?

Деформация пружины во всех случаях мала по сравнению с длиной недеформированной пружины.

$$\boxed{1)\ \Delta x = \frac{\Delta x_0}{2};\ 2)\ T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(m + \frac{M}{3}\right)\Delta x_0}{Mg}}}$$

[1]Сравните с *условием квазистационарности* из листка «Переменный ток. 1»