# Магнитное поле токов

В основе учения о магнитном поле лежат два экспериментальных наблюдения: 1) магнитное поле действует на движущиеся заряды; 2) магнитное поле создаётся движущимися зарядами. Первое из них — действие магнитного поля на заряды и токи — это соответственно сила Лоренца и сила Ампера, которые мы изучали в двух предыдущих листках. А сейчас нас будет интересовать второе наблюдение: как найти магнитное поле движущегося заряда или провода с током?

Опыт показывает, что магнитное поле заряда $q$, движущегося с постоянной скоростью $\vec{v}$, равно

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, идущий из заряда $q$ в точку наблюдения, а константа $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м называется *магнитной постоянной* (это магнитный аналог электрической постоянной $\varepsilon_0$).

Задача 1. Убедитесь, что формулу (1) можно переписать в виде

$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}, \tag{2}$$

где $\vec{E}$ — электрическое поле, которое создавал бы неподвижный заряд $q$ в той же точке наблюдения.

Задача 2. (*Савченко, 9.2.2*) Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда $\rho$, если нить движется в продольном направлении со скоростью $v$.

$B = \frac{\mu_0 \rho v}{2\pi r}$, где $r$ — расстояние до провода

Задача 3. (*Закон Био — Савара — Лапласа*) Пусть есть тонкий провод, по которому течёт ток $I$. Рассмотрим очень маленький (почти прямолинейный) кусочек этого провода, имеющий длину $dl$, и будем воспринимать его как вектор $d\vec{l}$, направление которого совпадает с направлением тока. Докажите закон Био — Савара — Лапласа: вектор магнитной индукции $d\vec{B}$, создаваемый этим кусочком, равен

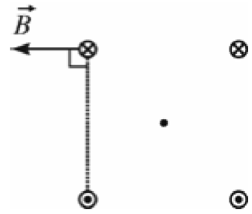
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

где $\vec{r}$ есть радиус-вектор, проведённый от нашего кусочка в точку наблюдения.

Задача 4. (*Савченко, 9.2.3*) Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечного прямого провода, по которому течёт ток $I$.

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где $r$ — расстояние до провода

Задача 5. (*МОШ, 2014, 11*) Как показали эксперименты Ж.-Б. Био и Ф. Савара 1820 года, магнитное поле длинного провода с током убывает обратно пропорционально расстоянию от длинного прямого провода. Четыре очень длинных прямых провода с протекающими по ним равными по модулю постоянными токами расположены параллельно друг другу так, как показано на рисунке (сечения проводов плоскостью рисунка находятся в вершинах квадрата). Известно, что модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого одним проводом в соседней с ним вершине этого квадрата, равен $B$, а поле самого провода на его оси равно нулю.




Найдите модуль $B_1$ суммарного вектора магнитной индукции в каждой вершине указанного квадрата. Найдите также модуль $B_2$ вектора индукции магнитного поля в центре этого квадрата.

$\boxed{B_1 = B\sqrt{\frac{5}{2}};\ B_2 = 4B}$

Задача 6. (*Савченко, 9.2.6*) Длинные прямые провода с током пересекаются под прямым углом. Определите индукцию магнитного поля в точке с координатами $x$ и $y$, если осями координат служат провода, а ток в проводах $I$.

$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, \text{ если оси вдоль тока}}$

Задача 7. (*Савченко, 9.2.7*) Длинные прямые провода с током пересекаются под углом $\alpha$. Найдите индукцию магнитного поля на прямой, проходящей через точку пересечения проводов перпендикулярно им обоим. Ток в проводах $I$.

$\boxed{B = \frac{\mu_0}{\pi r}\cos\frac{\alpha}{2}, \text{ где } \alpha \text{ — угол между направлениями токов}}$

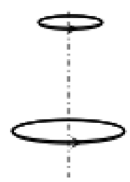
Задача 8. (*Савченко, 9.2.10*) По кольцу радиуса $R$ течёт ток $I$. Определите индукцию магнитного поля в центре кольца и на его оси на расстоянии $h$ от центра кольца.

$\boxed{B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R},\ B(h) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+h^2)^{3/2}}}$

Задача 9. (*«Курчатов», 2016, 11*) В фантастическом фильме описали геофизический эксперимент. Вдоль экватора проложили толстый проводник и по нему пропустили такой ток, что магнитное поле вблизи полюсов Земли стало равным нулю. Найдите силу этого тока. Индукция магнитного поля Земли над полюсами равна $B = 6 \cdot 10^{-5}$ Тл. Радиус Земли $R = 6370$ км. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$\boxed{I = 4\sqrt{2}\frac{BR}{\mu_0} \approx 1{,}7 \cdot 10^9 \text{ А}}$

Задача 10. (*«Росатом», 2018, 11*) Имеется два кольца с радиусами $R$ и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии $d$ друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи $I$. Найти силу взаимодействия колец.



$\boxed{F = 6\pi\mu_0 I^2 \frac{R^4}{d^4}}$

Задача 11. (*Савченко, 9.2.11*) Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в центре кольца с током, если его согнуть под углом $\alpha$? Ток в кольце не меняется.

$\boxed{B = B_0 \sin\frac{\alpha}{2}}$

Задача 12. (*Савченко, 9.2.12*) Провод, лежащий в одной плоскости, состоит из двух длинных прямых параллельных участков, связанных полуокружностью радиуса $R$. По проводу течёт ток $I$. Определите индукцию магнитного поля в центре полуокружности.

$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)}$

Задача 13. (*Савченко, 9.2.13*) Длинный прямой провод с током $I$ имеет участок в виде полуокружности радиуса $R$. Определите индукцию магнитного поля в центре полуокружности.


$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4R}}$

Задача 14. (*Савченко, 9.2.14*) Прямой провод имеет виток радиуса $R$. По проводу течёт ток $I$. Определите индукцию магнитного поля в центре витка и на его оси на расстоянии $h$ от его центра.


$\boxed{B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right);\ B(h) = \frac{\mu_0 I}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi^2(R^2+h^2)} + \frac{R^4}{(R^2+h^2)^3} + \frac{2R^3}{\pi(R^2+h^2)^{5/2}}}}$

Задача 15. (*Савченко, 9.2.15*) а) Металлическое кольцо разорвалось, когда ток в кольце был $I_0$. Сделали точно такое же кольцо, но из материала, предел прочности которого в десять раз больше. Какой ток разорвёт новое кольцо?

б) Какой ток разорвёт новое кольцо, сделанное из этого более прочного материала, если все размеры нового кольца в два раза больше размеров старого?

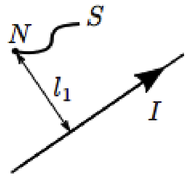
$\boxed{\text{а) } I_1 = I_0\sqrt{10};\ \text{б) } I_2 = I_0\sqrt{40}}$

Задача 16. Имеется плоский контур, который можно самосовместить поворотом на некоторый угол вокруг оси $\ell$, перпендикулярной плоскости контура (например, контур является правильным многоугольником). Докажите, что магнитное поле этого контура на оси $\ell$ на большом расстоянии $h$ от контура равно

$$B = \frac{\mu_0 M}{2\pi h^3}\,,$$

где $M$ — магнитный момент контура.

Задача 17. (*Всеросс., 2019, финал, 11*) Тонкий, однородный нерастяжимый гибкий шнур длины $l$ изготовлен из ферромагнетика, причем магнитный момент каждого его маленького элемента направлен вдоль шнура.




Один конец шнура удерживают на расстоянии $l_1$ ($l_1 > l$) от бесконечного прямого провода, по которому течет электрический ток силой $I$ (рис.). Пренебрегая силой тяжести и собственным магнитным полем шнура

1. найдите расстояние между концами шнура в состоянии равновесия;

2. на каком расстоянии от провода окажется свободный конец шнура?

*Указание.* Энергия маленького элемента шнура длиной $\Delta l$ во внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ определяется выражением

$$\Delta W = -kB\Delta l \cos\varphi,$$

где $\varphi$ — угол между $\vec{B}$ и направлением шнура, а $k$ – постоянный коэффициент.

1) $l$; 2) $\sqrt{l_1^2 - l^2}$

## Теорема о циркуляции

Теорема о циркуляции является магнитным аналогом теоремы Гаусса и относится к фундаментальным утверждениям электродинамики.

**Теорема о циркуляции.** Пусть Γ — произвольный замкнутый контур, пронизываемый током $I$. Тогда индукция $\vec{B}$ магнитного поля, создаваемого током $I$, удовлетворяет равенству

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

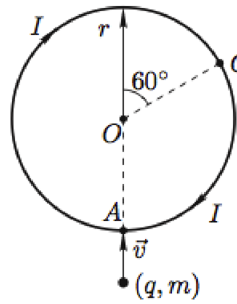
Задача 18. Снова найдите индукцию магнитного поля прямолинейного бесконечного провода с током $I$ на расстоянии $r$ от провода.

Задача 19. Найдите индукцию магнитного поля внутри катушки с током $I$, если число витков катушки равно $N$, а длина катушки $l$. Используйте тот факт, что магнитное поле внутри катушки близко к однородному, а вне катушки вдали от торцов — близко к нулю.

$B = \frac{\mu_0 IN}{l}$

Полученную формулу можно записать также в виде $B = \mu_0 nI$, где $n = N/l$ — плотность намотки витков.

Задача 20. (*Всеросс., 2011, финал, 11*) На рисунке изображено сечение длинной прямой катушки (соленоида), радиус витков которой $r = 10$ см. Число витков катушки на 1 метр длины $n = 500$ м$^{-1}$. По виткам катушки протекает постоянный ток $I = 0{,}1$ А (по часовой стрелке).




Через зазор между витками в точке $A$ в катушку влетает заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 10^3$ В. Скорость частицы в точке $A$ направлена вдоль радиуса соленоида. Частица движется внутри соленоида в плоскости, перпендикулярной его оси, и вылетает из соленоида в точке $C$, расположенной под углом $\alpha = 60^\circ$ к первоначальному направлению. Определите:

1) знак заряда частицы;

2) радиус кривизны траектории частицы внутри соленоида;

3) удельный заряд частицы (то есть отношение модуля заряда частицы к её массе).

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7$ (единиц СИ).

1) $q < 0$; 2) $R = r\sqrt{3} \approx 17{,}3$ см; 3) $\gamma = \frac{2U}{(\mu_0 n I R)^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^{11}$ Кл/кг (это электрон)

Задача 21. (*APhO, 2000*) **Эффект Стюарта — Толмена.** В 1917 году Стюарт и Толмен обнаружили ток через катушку, намотанную на цилиндр, вращаемый аксиально с определённым угловым ускорением.

Рассмотрим большое количество колец, каждое радиуса $r$, изготовленных из тонкой металлической проволоки с сопротивлением $R$. Кольца были одинаковым образом надеты на длинный стеклянный цилиндр, пустой внутри. Их положения на цилиндре зафиксированы приклеиванием колец к цилиндру. Количество колец на единицу длины вдоль оси симметрии равно $n$. Плоскости колец перпендикулярны оси симметрии цилиндра.

В некоторый момент цилиндр начинает вращательное движение вокруг своей оси симметрии с ускорением $\alpha$. Найдите величину магнитного поля $B$ в центре цилиндра (по прошествии достаточно долгого времени). Мы полагаем, что электрический заряд $e$ электрона и масса электрона $m$ известны.

$B = 2\pi\mu_0 \frac{nmr^2\alpha}{eR}$

## Токи, распределённые по поверхности или объёму

Задача 22. (*Савченко, 9.3.1*) Используя формулу (2), определите индукцию магнитного поля вблизи равномерно заряженной пластины, которая движется со скоростью $v$ вдоль своей плоскости. Поверхностная плотность заряда пластины $\sigma$.

$B = \frac{1}{2}\mu_0 v\sigma$

Задача 23. (*Савченко, 9.3.2*) Найдите индукцию магнитного поля внутри плоского конденсатора, движущегося со скоростью 9 м/с параллельно своим пластинам. Расстояние между пластинами 10 мм, напряжение на них 10 кВ.

$B = \mu_0\varepsilon_0 v\frac{U}{d} = 10^{-10}$ Тл

Задача 24. (*Савченко, 9.3.3*) Чему равна индукция магнитного поля бесконечной плоскости, по которой идет ток линейной плотности $i$?

*Примечание.* Задачу полезно решить двумя способами: через теорему о циркуляции и с помощью формулы (2).

$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2}}$

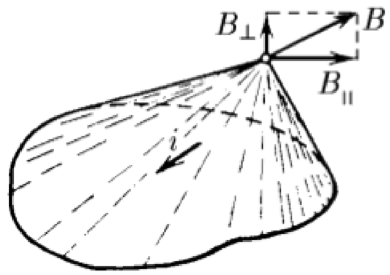
Задача 25. (*Савченко, 9.3.4*) По двум параллельным плоскостям текут в одном направлении токи, линейная плотность которых $i_1$ и $i_2$. Определите индукцию магнитного поля между плоскостями и вне их.

$\boxed{B_{\text{in}} = \frac{\mu_0}{2}\left|i_1 - i_2\right|,\ B_{\text{out}} = \frac{\mu_0}{2}(i_1 + i_2)}$

Задача 26. (*Савченко, 9.3.5*) По двум параллельным шинам течёт ток $I$. Ширина шин $b$ много больше расстояния между ними. Чему равна сила, действующая на единицу длины шины?

$\boxed{f = \frac{\mu_0 I^2}{2b}}$

Задача 27. (*Савченко, 9.3.7*) По плоской поверхности, изображённой на рисунке, течёт ток линейной плотности $i$. Докажите, что составляющая индукции магнитного поля, параллельная поверхности и перпендикулярная направлению $i$, определяется формулой




$$B_\parallel = \frac{\mu_0 i \Omega}{4\pi},$$

где $\Omega$ — телесный угол, под которым видна поверхность.

*Указание.* Вспомните формулу для $E_\perp$ из листка «Напряжённость электрического поля» и используйте формулу (2).

Задача 28. (*Савченко, 9.3.8*) Используя формулу $B_\parallel = \frac{\mu_0 i \Omega}{4\pi}$, решите следующие задачи.

а) Определите индукцию магнитного поля бесконечно длинной полосы ширины $2h$ в точке над средней линией полосы на расстоянии $h$ от этой линии, если вдоль полосы течёт ток линейной плотности $i$.

б) Определите индукцию магнитного поля по оси бесконечно длинного цилиндра, по поверхности которого течёт поперечный ток линейной плотности $i$.

в) По прямому длинному проводнику, сечение которого — правильный треугольник со стороной $a$, течёт ток плотности $j$. Определите индукцию магнитного поля на рёбрах проводника.

$\boxed{\text{а) } B = \frac{\mu_0 i}{4};\ \text{б) } B = \mu_0 i;\ \text{в) } B = \frac{\mu_0 j a \sqrt{3}}{12}}$

Задача 29. (*Савченко, 9.3.15*) С помощью теоремы о циркуляции решите следующие задачи.

а) По бесконечно длинному прямому проводу радиуса $r$ течёт ток $I$. Ток распределён равномерно по сечению провода. Найдите индукцию магнитного поля внутри и вне провода.

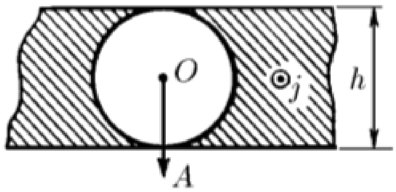
б) По длинной широкой шине с поперечным размером $a$ течёт ток, равномерно распределённый по сечению проводника. Плотность тока $j$. Как зависит индукция магнитного поля от расстояния $x$ до средней плоскости шины?

$$\boxed{\text{а) } B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}, & \text{если } x < r, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, & \text{если } x > r \end{cases} \quad \text{б) } B = \begin{cases} \mu_0 j x, & \text{если } x < \frac{a}{2}, \\ \mu_0 j \frac{a}{2}, & \text{если } x > \frac{a}{2} \end{cases}}$$

Задача 30. (*Савченко, 9.3.16*) Через тороидальный соленоид, имеющий $N$ витков, протекает ток $I$. Внешний радиус тора $R$, внутренний $r$. Определите минимальную и максимальную индукцию магнитного поля внутри соленоида.

$B_{\min} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$, $B_{\max} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

Задача 31. (*Савченко, 9.3.20*) В бесконечной пластине толщины $h$ вырезали цилиндрическую полость радиуса $h/2$, ось которой параллельна поверхностям пластины. Во всем объёме пластины, за исключением полости, течёт ток, направленный вдоль оси полости. Найдите распределение индукции магнитного поля вдоль прямой $OA$, которая проходит через ось полости и перпендикулярна поверхностям пластины. Плотность тока $j$.

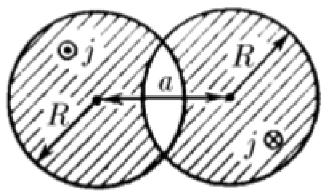



$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} jx, & \text{если } x < \frac{h}{2}, \\ \frac{\mu_0}{2} jh\left(1 - \frac{h}{4x}\right), & \text{если } x > \frac{h}{2} \end{cases}$$

Задача 32. (*Савченко, 9.3.21*) Определите индукцию магнитного поля в длинной цилиндрической полости, расположенной внутри цилиндрического проводника, если ось полости параллельна оси проводника и отстоит от нее на расстоянии $d$. Ток распределен равномерно по сечению проводника. Плотность тока $j$.

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{d}$

Задача 33. (*Савченко, 9.3.22*) а) Два цилиндра радиуса $R$, оси которых находятся на расстоянии $a$ друг от друга, пересекаются, как показано на рисунке. Через заштрихованные области вдоль осей в противоположных направлениях текут токи, плотность которых $\pm j$. Найдите индукцию магнитного поля в области, лежащей между заштрихованными областями.




б) Используя результат предыдущей задачи и применяя метод предельного перехода, найдите при $a \to 0$, $j \to \infty$ распределение линейной плотности тока на поверхности цилиндра радиуса $R$, которое дает однородное внутри цилиндра магнитное поле индукции $B_0$. Как связана максимальная линейная плотность тока с индукцией поля $B_0$?

а) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{a}$; б) $i = \frac{2B_0}{\mu_0} \cos\alpha$