Локальный закон Ома

Рассмотрим однородный проводник длиной l и удельным сопротивлением ρ. Площадь поперечного сечения проводника постоянна вдоль всей его длины и равна S. По проводнику течёт постоянный ток I.

Найдём двумя способами напряжение на концах проводника. С одной стороны, согласно закону Ома для участка цепи,

$$U = IR = I\frac{\rho l}{S}\,. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$U = El, \qquad (2)$$

где E — напряжённость электрического поля в проводнике. Приравнивая правые части формул (1) и (2) и сокращая на l, получим:

$$E = I\frac{\rho}{S}\,. \qquad (3)$$

Равенство (3) есть *локальный закон Ома*[1]. Почему «локальный»? Потому что, зная ток в проводнике, мы можем по формуле (3) вычислить напряжённость электрического поля в заданной точке проводника.

Локальному закону Ома (3) можно придать ещё более компактную форму. Величина $j = I/S$ есть *плотность тока*; она показывает, какой заряд проходит через единицу площади поперечного сечения проводника в единицу времени. Тогда формула (3) переписывается в виде

$$E = j\rho. \qquad (4)$$

Полученное равенство (4) связывает локальные величины: напряжённость электрического поля и плотность тока в данной точке проводника. Локальный закон Ома в форме (4) уже не содержит S и справедлив для однородных проводников переменного поперечного сечения.

Локальный закон Ома чаще записывают в несколько ином виде. *Удельная проводимость* λ — это величина, обратная удельному сопротивлению вещества: $\lambda = 1/\rho$. Тогда формулу (4) можно переписать следующим образом:

$$j = \lambda E.$$

Именно эту формулу (причём в векторном виде: $\vec{j} = \lambda\vec{E}$) вы обнаружите в вузовском курсе физики.

Задача 1. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами d, заполненный средой с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ, включён в цепь батареи с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Чему равна напряжённость E электрического поля в конденсаторе, если его ёмкость равна C?

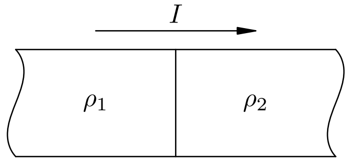
$$\boxed{E = \frac{\mathscr{E}}{d}\left(1 + \frac{rC}{\varepsilon_0\varepsilon\rho}\right)^{-1}}$$

Задача 2. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Найдите силу взаимодействия между пластинами конденсатора, когда через конденсатор течёт постоянный ток I. Площадь пластин конденсатора равна S.

$$\boxed{F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon I^2\rho^2}{2S}}$$

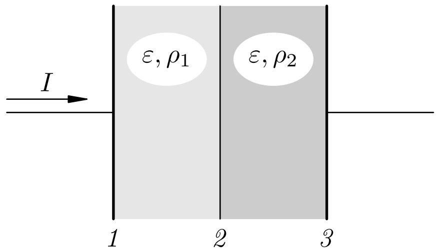
[1] Другие названия — *закон Ома в локальной форме*, *закон Ома в дифференциальной форме*. При этом равенство $U = IR$ называется также *законом Ома в интегральной форме*.

Задача 3. (*МФТИ, 1991*) Через два последовательно соединённых проводника одинакового сечения S, но с разными удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), течёт ток I (см. рисунок). Определить знак и величину поверхностной плотности заряда, возникающего на границе раздела проводников.



$\sigma = \frac{\varepsilon_0 I(\rho_2-\rho_1)}{S} > 0$

Задача 4. (*МФТИ, 1991*) Между пластинами *1* и *3* плоского конденсатора помещена тонкая металлическая пластина *2* параллельно обкладкам конденсатора (см. рисунок). Образовавшиеся объёмы заполнены диэлектрическими жидкостями с одинаковой диэлектрической проницаемостью ε, но с разными удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$). Найти величину и направление силы, действующей на пластину *2* со стороны электрического поля, когда через конденсатор течёт постоянный ток I. Площади всех трёх пластин одинаковы и равны S.



$F = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon I^2}{2S}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)$, слева направо

Задача 5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) В плоский воздушный конденсатор ёмкости C плотно вставили две проводящие пластины одинаковой толщины. Удельное сопротивление материала одной пластины равно ρ_1, а другой — ρ_2. На обкладки конденсатора подали постоянное напряжение U («плюс» источника соединён с обкладкой, с которой контактирует пластина 1). Найти заряд, накопившийся на границе раздела пластин при постоянном токе.

$q = \frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+\rho_2} CU$

Задача 6. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 11*) Дирижабль завис над гористой местностью. Из-за естественной ионизации у воздуха имеется некоторая проводимость. Электрический заряд дирижабля уменьшается в два раза за каждые $\tau = 10$ мин. Найдите удельное сопротивление ρ воздуха.

$\rho = \frac{\tau}{\varepsilon_0 \ln 2} \approx 10^{14}$ Ом · м

Задача 7. (*Всеросс., 2009, финал, 10*) Некоторое вещество обладает нелинейной проводимостью. Удельное сопротивление ρ этого вещества зависит от напряжённости E электрического поля по следующему закону:

$$\rho = \rho_0 + AE^2,$$

где $\rho_0 = 1{,}0 \cdot 10^7$ Ом · м и $A = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Ом · м^3/В^2. Этим веществом заполнено всё пространство между пластинами плоского конденсатора. Площадь пластин $S = 1$ м^2.

1) Через конденсатор течёт ток. Найдите максимально возможное значение силы тока $I_{\max}$.

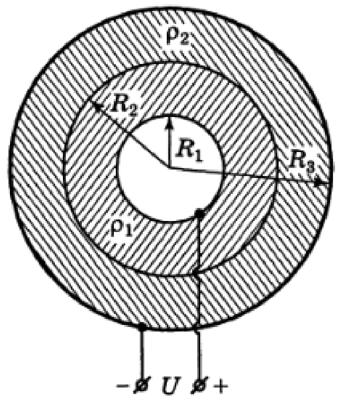
2) Предполагая, что расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, определите максимальную тепловую мощность, которая может выделяться внутри конденсатора при изменении напряжения между пластинами. Постройте качественный график зависимости мощности P от напряжения U.

3) Пусть теперь напряжение на конденсаторе постоянно: $U_1 = 2{,}0 \cdot 10^3$ В. Какая максимальная мощность может выделяться внутри конденсатора, если изменять расстояние между пластинами? При каком значении $d = d_1$ достигается максимальная мощность? Предполага-

ется, что конденсатор заполнен веществом при любых значениях d. Постройте качественный график зависимости выделяемой мощности P от расстояния d между пластинами.

1) $I_{\max} = \frac{S}{2\sqrt{A\rho_0}} = 5$ мА; 2) $P_{\max} = \frac{Sd}{A} = 10$ Вт; 3) $P_{\max} = \frac{U_1 S}{2\sqrt{A\rho_0}} = 10$ Вт при $d_1 = U_1\sqrt{\frac{A}{\rho_0}} = 2$ см

Задача 8. (*Всеросс., 2001, финал, 10*) Сферический конденсатор с радиусами обкладок $R_1 = R$ и $R_3 = 3R$ подсоединён к источнику с постоянным напряжением U (рис.). Пространство между обкладками заполнено двумя слоями различных веществ с удельными сопротивлениями $\rho_1 = \rho$ и $\rho_2 = 2\rho$ и диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Радиус сферической границы между слоями $R_2 = 2R$. Удельная проводимость слоёв между обкладками конденсатора намного меньше удельной проводимости материала обкладок.



1) Найдите заряд на границе между слоями различных веществ.

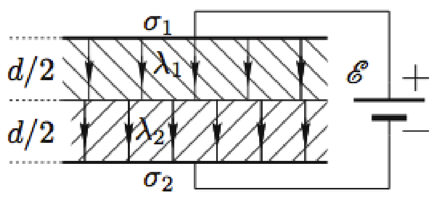
2) Найдите силу тока, протекающего через конденсатор.

$q = \frac{24}{5}\pi\varepsilon_0 UR$; $I = \frac{24\pi UR}{5\rho}$

Задача 9. (*МОШ, 2010, 10*) Имеются три концентрические хорошо проводящие металлические сферы 1, 2 и 3 радиусами R, $2R$ и $3R$. Пространство между первой и второй сферами заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением 11ρ, а между второй и третьей — жидкостью с диэлектрической проницаемостью 11ε и удельным сопротивлением ρ. Между внутренней и внешней сферами при помощи батарейки поддерживается постоянная разность потенциалов U. Чему равен заряд q_2 средней сферы? Какова сила тока I, который течёт при этом в цепи?

$q_2 = 0$; $I = \frac{12\pi RU}{17\rho}$

Задача 10. (*Всеросс., 2011, финал, 10*) Плоский конденсатор с расстоянием между обкладками d подсоединён к источнику постоянного тока с ЭДС, равной $\mathscr{E}$ (рис.).



Конденсатор заполнен двумя слоями слабопроводящих сред с разными значениями удельной проводимости λ_1 и λ_2. Оба слоя находятся в электрическом контакте между собой и с пластинами конденсатора. Толщина каждого слоя $d/2$, диэлектрическая проницаемость обоих слоёв $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Найдите:

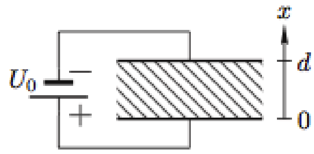
1) поверхностные плотности σ_1 и σ_2 зарядов на пластинах конденсатора;

2) поверхностную плотность σ заряда в плоскости контакта слоёв.

Примечание. Удельная проводимость — это величина, обратная удельному сопротивлению: $\lambda = 1/\rho$.

$\sigma_1 = \frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, $\sigma_2 = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, $\sigma = \frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

Задача 11. (*Всеросс., 2011, финал, 11*) Плоский конденсатор ёмкостью C_0 заполнен слабопроводящей слоистой средой с $\varepsilon = 1$, удельное сопротивление которой зависит от расстояния x до одной из пластин по закону



$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{2x}{d}\right),$$

где d — расстояние между пластинами конденсатора. Конденсатор подключён к батарее с напряжением U_0 (рис.). Найдите:

1) силу тока, протекающего через конденсатор;
2) заряды нижней (q_1) и верхней (q_2) пластин конденсатора;
3) заряд q внутри конденсатора (т. е. в среде между пластинами);
4) электрическую энергию $W_э$, запасённую в конденсаторе.

1) $I = \frac{C_0 U_0}{2\varepsilon_0\rho_0}$; 2) $q_1 = \frac{C_0U_0}{2}$, $q_2 = -\frac{3C_0U_0}{2}$; 3) $q = C_0U_0$; 4) $W_э = \frac{13}{24}C_0U_0^2$

Задача 12. (*APhO, 2013*)

- Проводники в проводящей жидкости / Conductors in Conducting Liquid.
- Solution.