Кривизна траектории

В некоторых задачах приходится искать *радиус кривизны траектории*. Если траектория является окружностью, то ясно, что речь идёт о её радиусе. Но как быть, если траектория — не окружность, а, скажем, парабола?

Пусть движущееся тело проходит некоторую точку P своей траектории. В общем случае мы можем аппроксимировать (то есть приближённо заменить) маленький кусочек траектории в окрестности точки P маленькой дугой некоторой окружности. И чем меньше кусочек траектории, тем точнее он аппроксимируется дугой окружности. Так вот, радиус кривизны траектории в точке P — это радиус аппроксимирующей окружности, когда кусочек траектории становится исчезающе мал (стремится к нулю).

Скорость $\vec{v}$ тела направлена по касательной к траектории в точке P. *Нормаль* в точке P — это прямая, перпендикулярная касательной в данной точке[1]. *Нормальное ускорение* $\vec{a}_n$ — это составляющая полного ускорения $\vec{a}$ вдоль нормали; понятно, что нормальное ускорение есть не что иное, как центростремительное ускорение тела при движении по аппроксимирующей окружности:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}\,,$$

где ρ — радиус этой окружности (то есть радиус кривизны траектории). Отсюда получаем формулу для нахождения радиуса кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{a\cos\theta}\,,$$

где θ — угол между ускорением $\vec{a}$ и нормалью.

Задача 1. (*Всеросс., 1993, финал, 9*) Камень, брошенный под углом α к горизонту со скоростью v_0, летит по параболической траектории. По той же траектории с постоянной скоростью v_0 летит птица. Чему равно её ускорение в верхней точке траектории?

$\boxed{a = \frac{g}{\cos^2\alpha}}$

Задача 2. (*Всеросс., 1993, финал, 10*) Камень, брошенный под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, летит по некоторой траектории. Если по этой же траектории полетит комар с постоянной скоростью v_0, то каким будет его ускорение на высоте, равной половине высоты наибольшего подъёма камня? Сопротивление воздуха при движении камня можно не учитывать.

$\boxed{a = \frac{g\cos\alpha}{\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^{3/2}}}$

[1] Данное определение нормали годится в случае, когда траектория тела целиком расположена в одной плоскости. Только такие задачи вам и встретятся в школе.

Для пространственной кривой (например, винтовой линии) касательная определяется так же (как предельное положение секущей), а вот с нормалью дело обстоит сложнее.

Задача 3. (*«Физтех», 2021, 10*) Дальность полёта камня, брошенного под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, равна $S = 17$ м.

1. Найдите начальную скорость V_0 камня.

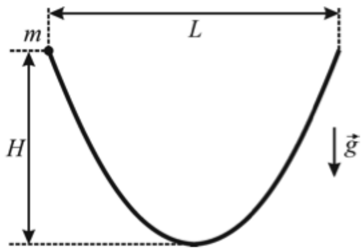
Через некоторое время по траектории камня летит модель самолёта массой $m = 1$ кг с постоянной по величине скоростью $V = V_0/4$.

2. В высшей точке траектории найдите вертикальную составляющую силы F, с которой воздух действует на модель самолёта.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха в процессе полёта камня считайте пренебрежимо малой. Точки старта и окончания полёта лежат в одной горизонтальной плоскости.

1) $V_0 = \sqrt{\frac{gS}{\sin 2\alpha}} \approx 14$ м/с; 2) $F = \frac{3}{4}mg = 7{,}5$ Н

Задача 4. (*МОШ, 2015, 10*) Отрезок проволоки изогнут в виде симметричного участка параболы и расположен так, что ось её симметрии вертикальна. На этот отрезок надевают маленькую бусинку массой m, удерживая её у одного из краёв проволоки. Затем бусинку отпускают без начальной скорости, и она начинает скользить по проволоке под действием силы тяжести. Найдите модуль силы, с которой бусинка будет давить на проволоку, находясь в самой нижней точке своей траектории. Трение пренебрежимо мало. Размеры L и H, указанные на рисунке, известны.



$N = mg\left(1 + \frac{16H^2}{L^2}\right)$

Задача 5. (*Циклоида*) Колесо радиуса r катится без проскальзывания с постоянной скоростью v по горизонтальной поверхности. Траектория, которую описывает фиксированная точка обода колеса в неподвижной системе отсчёта, называется *циклоидой* (см. гифку в Википедии).

Ось x направляем горизонтально, ось y — вертикально вверх. Пусть точка M обода колеса имела координаты $(0, 0)$ при $t = 0$.

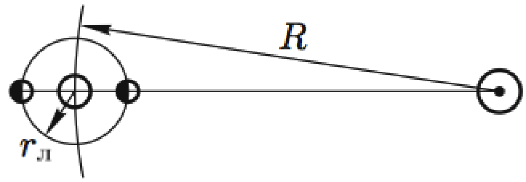
1) Напишите параметрические уравнения циклоиды, то есть найдите координаты $x(t)$ и $y(t)$ точки M в произвольный момент времени.

2) Найдите радиус кривизны циклоиды в её верхней точке.

1) $x = r(\omega t - \sin \omega t)$, $y = r(1 - \cos \omega t)$, где $\omega = v/r$; 2) $R = 4r$

[Овчинкин] → 1.3, 1.14, 1.20, 1.21.

Задача 6. (*Всеросс., 2007, финал, 10*) В астрономии за единицу длины принято среднее расстояние R от Земли до Солнца, называемое астрономической единицей (1 а. е). В геоцентрической системе отсчёта, связанной с Землёй, Луна вращается по круговой орбите радиуса $r_л = 2{,}57 \cdot 10^{-3}$ а. е. В гелиоцентрической системе траектория нашего естественного спутника выглядит гораздо более сложно, поскольку Луна вращается вокруг Земли, которая в свою очередь вращается вокруг Солнца (вращение происходит в одну сторону). Вычислите радиусы кривизны $r_п$ и $r_н$ траектории Луны в гелиоцентрической системе отсчёта во время полнолуния и новолуния. Ответ выразите в астрономических единицах. Отметьте качественно положение соответствующих центров кривизны ($O_п$ и $O_н$) на данном рисунке, на котором изображены Солнце и Земля. Отношение массы Земли к массе Солнца $m_з/m_с = 3 \cdot 10^{-6}$.



$r_п = R\frac{\left(1+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2}{\frac{1}{(1+\beta)^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}} \approx 0{,}74$ а. е.; $r_н = R\frac{\left(1-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2}{\frac{1}{(1-\beta)^2}-\frac{\alpha}{\beta^2}} \approx 1{,}69$ а. е., где $\alpha = m_з/m_с$, $\beta = r_л/R$

Наряду с «физическим» вычислением радиуса кривизны траектории (через центростремительное ускорение) полезно знать и математические приёмы (применять которые в задачах по физике можно, разумеется, на физическом уровне строгости).

Задача 7. Найдите радиус r кривизны параболы $y = ax^2$ ($a > 0$) в её вершине, аппроксимировав параболу окружностью $x^2 + (y - r)^2 = r^2$.

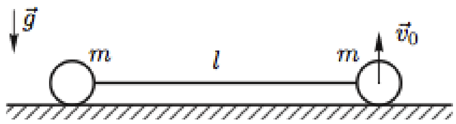
$r = \frac{1}{2a}$

Задача 8. Найдите радиусы кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точках его пересечения с осями координат, аппроксимировав нужный кусок эллипса параболой.

$r_1 = \frac{b^2}{a}$, $r_2 = \frac{a^2}{b}$

[Овчинкин] → 2.45, 2.46.

Задача 9. (*Всеросс., 2013, финал, 10*) Два одинаковых маленьких шарика массы m связаны невесомой и нерастяжимой нитью длины l и покоятся на гладкой горизонтальной плоскости (рис.). Правому шарику сообщается вертикальная скорость v_0. Ускорение свободного падения g.



1) Найдите радиус кривизны траектории верхнего шарика в момент, когда нить вертикальна.

2) При каком значении начальной скорости v_0 нижний шарик в этот момент перестанет давить на плоскость?

1) $R = \frac{l}{4}$; 2) $v_0 = \sqrt{3gl}$