Конденсатор. Энергия электрического поля

Темы кодификатора ЕГЭ: электрическая ёмкость, конденсатор, энергия электрического поля конденсатора.

Предыдущие две статьи были посвящены отдельному рассмотрению того, каким образом ведут себя в электрическом поле проводники и каким образом — диэлектрики. Сейчас нам понадобится объединить эти знания. Дело в том, что большое практическое значение имеет совместное использование проводников и диэлектриков в специальных устройствах — *конденсаторах*.

Но прежде введём понятие *электрической ёмкости*.

Ёмкость уединённого проводника

Предположим, что заряженный проводник расположен настолько далеко от всех остальных тел, что взаимодействие зарядов проводника с окружающими телами можно не принимать во внимание. В таком случае проводник называется *уединённым*.

Потенциал всех точек нашего проводника, как мы знаем, имеет одно и то же значение φ, которое называется потенциалом проводника. Оказывается, что *потенциал уединённого проводника прямо пропорционален его заряду*. Коэффициент пропорциональности принято обозначать $1/C$, так что

$$\varphi = \frac{q}{C}\,.$$

Величина C называется *электрической ёмкостью* проводника и равна отношению заряда проводника к его потенциалу:

$$C = \frac{q}{\varphi}\,. \qquad (1)$$

Например, потенциал уединённого шара в вакууме равен:

$$\varphi = \frac{kq}{R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,,$$

где q — заряд шара, R — его радиус. Отсюда ёмкость шара:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \qquad (2)$$

Если шар окружён средой-диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то его потенциал уменьшается в ε раз:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}\,.$$

Соответственно, ёмкость шара в ε раз увеличивается:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \qquad (3)$$

Увеличение ёмкости при наличии диэлектрика — важнейший факт. Мы ещё встретимся с ним при рассмотрении конденсаторов.

Из формул (2) и (3) мы видим, что ёмкость шара зависит только от его радиуса и диэлектрической проницаемости окружающей среды. То же самое будет и в общем случае: *ёмкость уединённого проводника не зависит от его заряда; она определяется лишь размерами и формой проводника, а также диэлектрической проницаемостью среды, окружающей проводник. От вещества проводника ёмкость также не зависит.*

В чём смысл понятия ёмкости? *Ёмкость показывает, какой заряд нужно сообщить проводнику, чтобы увеличить его потенциал на 1 В.* Чем больше ёмкость — тем, соответственно, больший заряд требуется поместить для этого на проводник.

Единицей измерения ёмкости служит *фарад* (Ф). Из определения ёмкости (1) видно, что Ф = Кл/В.

Давайте ради интереса вычислим ёмкость земного шара (он является проводником!). Радиус считаем приближённо равным 6400 км.

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \approx 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6400 \cdot 10^3 \approx 712 \text{ мкФ}.$$

Как видите, 1 Ф — это очень большая ёмкость.

Единица измерения ёмкости полезна ещё и тем, что позволяет сильно сэкономить на обозначении размерности диэлектрической постоянной ε_0. В самом деле, выразим ε_0 из формулы (2):

$$\varepsilon_0 = \frac{C}{4\pi R}\,.$$

Следовательно, диэлектрическая постоянная может измеряться в Ф/м:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}\,.$$

Так легче запомнить, не правда ли?

Ёмкость плоского конденсатора

Ёмкость уединённого проводника на практике используется редко. В обычных ситуациях проводники не являются уединёнными. Заряженный проводник взаимодействует с окружающими телами и наводит на них заряды, а потенциал поля этих индуцированных зарядов (по принципу суперпозиции!) изменяет потенциал самого проводника. В таком случае уже нельзя утверждать, что потенциал проводника будет прямо пропорционален его заряду, и понятие ёмкости проводника самого по себе фактически утрачивает смысл.

Можно, однако, создать систему заряженных проводников, которая даже при накоплении на них значительного заряда почти не взаимодействует с окружающими телами. Тогда мы сможем снова говорить о ёмкости — но на сей раз о ёмкости этой системы проводников.

Наиболее простым и важным примером такой системы является *плоский конденсатор*. Он состоит из двух параллельных металлических пластин (называемых *обкладками*), разделённых слоем диэлектрика. При этом расстояние между пластинами много меньше их собственных размеров.

Для начала рассмотрим *воздушный* конденсатор, у которого между обкладками находится воздух ($\varepsilon = 1$).

Пусть заряды обкладок равны $+q$ и $-q$. Именно так и бывает в реальных электрических схемах: заряды обкладок равны по модулю и противоположны по знаку. Величина q — заряд положительной обкладки — называется *зарядом конденсатора*.

Пусть S — площадь каждой обкладки. Найдём поле, создаваемое обкладками в окружающем пространстве.

Поскольку размеры обкладок велики по сравнению с расстоянием между ними, поле каждой обкладки вдали от её краёв можно считать однородным полем бесконечной заряженной плоскости:

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,.$$

Здесь E_+ — напряжённость поля положительной обкладки, E_- — напряженность поля отрицательной обкладки, σ — поверхностная плотность зарядов на обкладке:

$$\sigma = \frac{q}{S}\,.$$

На рис. 1 (слева) изображены векторы напряжённости поля каждой обкладки в трёх областях: слева от конденсатора, внутри конденсатора и справа от конденсатора.

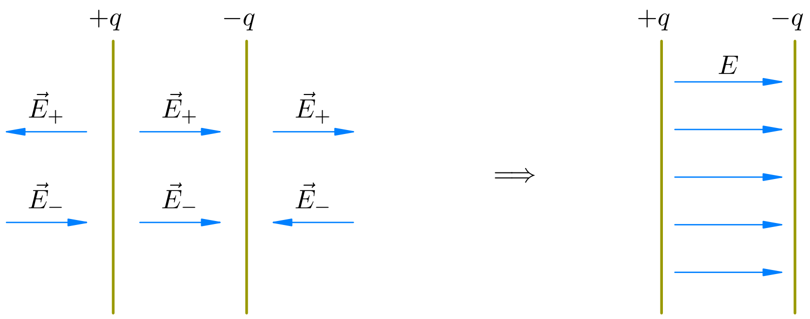

Рис. 1. Электрическое поле плоского конденсатора

Согласно принципу суперпозиции, для результирующего поля $\vec{E}$ имеем:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \,.$$

Нетрудно видеть, что слева и справа от конденсатора поле обращается в нуль (поля обкладок погашают друг друга):

$$E = E_+ - E_- = 0.$$

Внутри конденсатора поле удваивается:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \,,$$

или

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \,. \tag{4}$$

Результирующее поле обкладок плоского конденсатора изображено на рис. 1 справа. Итак:

Внутри плоского конденсатора создаётся однородное электрическое поле, напряжённость которого находится по формуле (4). *Снаружи конденсатора поле равно нулю, так что конденсатор не взаимодействует с окружающими телами.*

Не будем забывать, однако, что данное утверждение выведено из предположения, будто обкладки являются бесконечными плоскостями. На самом деле их размеры конечны, и вблизи краёв обкладок возникают так называемые *краевые эффекты*: поле отличается от однородного и проникает в наружное пространство конденсатора. Но в большинстве ситуаций (и уж тем более в задачах ЕГЭ по физике) краевыми эффектами можно пренебречь и действовать так, словно утверждение, выделенное курсивом, является верным без всяких оговорок.

Пусть расстояние между обкладками конденсатора равно d. Поскольку поле внутри конденсатора является однородным, разность потенциалов U между обкладками равна произведению E на d (вспомните связь напряжения и напряжённости в однородном поле!):

$$U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 S} \,. \tag{5}$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора, как видим, прямо пропорциональна заряду конденсатора. Данное утверждение аналогично утверждению «потенциал уединённого проводника прямо пропорционален заряду проводника», с которого и начался весь разговор о ёмкости. Продолжая эту аналогию, определяем *ёмкость конденсатора* как отношение заряда конденсатора к разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{q}{U} \,. \tag{6}$$

Ёмкость конденсатора показывает, какой заряд ему нужно сообщить, чтобы разность потенциалов между его обкладками увеличилась на 1 В. Формула (6), таким образом, является модификацией формулы (1) для случая системы двух проводников — конденсатора.

Из формул (6) и (5) легко находим *ёмкость плоского воздушного конденсатора*:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\,. \tag{7}$$

Она зависит только от геометрических характеристик конденсатора: площади обкладок и расстояния между ними.

Предположим теперь, что пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Как изменится ёмкость конденсатора?

Напряжённость поля внутри конденсатора уменьшится в ε раз, так что вместо формулы (4) теперь имеем:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}\,. \tag{8}$$

Соответственно, напряжение на конденсаторе:

$$U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}\,. \tag{9}$$

Отсюда *ёмкость плоского конденсатора с диэлектриком*:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}\,. \tag{10}$$

Она зависит от геометрических характеристик конденсатора (площади обкладок и расстояния между ними) и от диэлектрической проницаемости диэлектрика, заполняющего конденсатор. Важное следствие формулы (10): *заполнение конденсатора диэлектриком увеличивает его ёмкость.*

Энергия заряженного конденсатора

Заряженный конденсатор обладает энергией. В этом можно убедиться на опыте. Если зарядить конденсатор и замкнуть его на лампочку, то (при условии, что ёмкость конденсатора достаточно велика) лампочка ненадолго загорится.

Следовательно, в заряженном конденсаторе запасена энергия, которая и выделяется при его разрядке. Нетрудно понять, что этой энергией является потенциальная энергия взаимодействия обкладок конденсатора — ведь обкладки, будучи заряжены разноимённо, притягиваются друг к другу.

Мы сейчас вычислим эту энергию, а затем увидим, что существует и более глубокое понимание происхождения энергии заряженного конденсатора.

Начнём с плоского воздушного конденсатора. Ответим на такой вопрос: какова сила притяжения его обкладок друг к другу? Величины используем те же: заряд конденсатора q, площадь обкладок S.

Возьмём на второй обкладке настолько маленькую площадку, что заряд q_0 этой площадки можно считать точечным. Данный заряд притягивается к первой обкладке с силой

$$F_0 = q_0 E_1,$$

где E_1 — напряжённость поля первой обкладки:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\,.$$

Следовательно,

$$F_0 = \frac{q_0 q}{2\varepsilon_0 S}\,.$$

Направлена эта сила параллельно линиям поля (т. е. перпендикулярно пластинам).

Результирующая сила F притяжения второй обкладки к первой складывается из всех этих сил F_0, с которыми притягиваются к первой обкладке всевозможные маленькие заряды q_0 второй обкладки. При этом суммировании постоянный множитель $q/(2\varepsilon_0 S)$ вынесется за скобку, а в скобке просуммируются все q_0 и дадут q. В результате получим:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\,. \tag{11}$$

Предположим теперь, что расстояние между обкладками изменилось от начальной величины d_1 до конечной величины d_2. Сила притяжения пластин совершает при этом работу:

$$A = F(d_1 - d_2).$$

Знак правильный: если пластины сближаются ($d_2 < d_1$), то сила совершает положительную работу, так как пластины притягиваются друг к другу. Наоборот, если удалять пластины ($d_2 > d_1$), то работа силы притяжения получается отрицательной, как и должно быть.

С учётом формул (11) и (7) имеем:

$$A = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}(d_1 - d_2) = \frac{q^2 d_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 d_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{2C_1} - \frac{q^2}{2C_2} = W_1 - W_2,$$

где $W_1 = q^2/(2C_1)$, $W_2 = q^2/(2C_2)$. Это можно переписать следующим образом:

$$A = -(W_2 - W_1) = -\Delta W,$$

где

$$W = \frac{q^2}{2C}\,. \tag{12}$$

Работа потенциальной силы F притяжения обкладок оказалась равна изменению со знаком минус величины W. Это как раз и означает, что W — потенциальная энергия взаимодействия обкладок, или *энергия заряженного конденсатора.*

Используя соотношение $q = CU$, из формулы (12) можно получить ещё две формулы для энергии конденсатора (убедитесь в этом самостоятельно!):

$$W = \frac{qU}{2}\,, \tag{13}$$

$$W = \frac{CU^2}{2}\,. \tag{14}$$

Особенно полезными являются формулы (12) и (14).

Допустим теперь, что конденсатор заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Сила притяжения обкладок уменьшится в ε раз, и вместо (11) получим:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}\,.$$

При вычислении работы силы F, как нетрудно видеть, величина ε войдёт в ёмкость C, и *формулы* (12) — (14) *останутся неизменными.* Ёмкость конденсатора в них теперь будет выражаться по формуле (10).

Итак, формулы (12) — (14) универсальны: они справедливы как для воздушного конденсатора, так и для конденсатора с диэлектриком.

Энергия электрического поля

Мы обещали, что после вычисления энергии конденсатора дадим более глубокое истолкование происхождения этой энергии. Что ж, приступим.

Рассмотрим воздушный конденсатор и преобразуем формулу (14) для его энергии:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{(Ed)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}Sd.$$

Но $Sd = V$ — объём конденсатора. Получаем:

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}V. \qquad (15)$$

Посмотрите внимательно на эту формулу. Она уже не содержит ничего, что являлось бы специфическим для конденсатора! Мы видим *энергию электрического поля* E, сосредоточенного в некотором объёме V.

Энергия конденсатора есть не что иное, как энергия заключённого внутри него электрического поля.

Итак, электрическое поле само по себе обладает энергией. Ничего удивительного для нас тут нет. Радиоволны, солнечный свет — это примеры распространения энергии, переносимой в пространстве электромагнитными волнами.

Величина $w = W/V$ — энергия единицы объёма поля — называется *объёмной плотностью энергии*. Из формулы (15) получим:

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (16)$$

В этой формуле не осталось вообще никаких геометрических величин. Она даёт максимально чистую связь энергии электрического поля и его напряжённости.

Если конденсатор заполнен диэлектриком, то его ёмкость увеличивается в ε раз, и вместо формул (15) и (16) будем иметь:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}V, \qquad (17)$$

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \qquad (18)$$

Как видим, энергия электрического поля зависит ещё и от диэлектрической проницаемости среды, в которой поле находится.

Замечательно, что полученные формулы для энергии и плотности энергии выходят далеко за пределы электростатики: они справедливы не только для электростатического поля, но и для электрических полей, меняющихся во времени.