

Законы Кеплера

Содержание

1	Эллипс	2
2	Гипербола	3
3	Парабола	4
4	Конические сечения	5
5	Задача двух тел	5
6	Сохранение энергии и момента импульса	7
7	Уравнение движения в полярных координатах	8
8	Эффективная потенциальная энергия	8
9	Один табличный интеграл	9
10	Уравнение траектории в полярных координатах	10
11	Доказательство третьего закона Кеплера	11
12	Задачи	12

Первый закон Кеплера. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Второй закон Кеплера. Радиус-вектор, проведённый к планете от Солнца, за одинаковые промежутки времени заметает одинаковые площади.

Третий закон Кеплера. Отношение квадрата периода обращения планеты к кубу большой полуоси её эллиптической орбиты есть константа, одна и та же для всех планет.

Цель данного листка — вывести законы Кеплера из законов Ньютона. Заодно мы установим очень красивый и важный факт: если сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния (закон всемирного тяготения или закон Кулона), то частица в поле неподвижного притягивающего центра C может двигаться только по эллипсу, гиперболе или параболе (с фокусом в точке C). Для соответствующего вывода нам понадобятся некоторые математические сведения по кривым второго порядка, с которых мы и начнём наш листок.

Задачи на эллиптическое, гиперболическое и параболическое движение встречаются на заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по физике, а также на APhO и IPhO. Тут вас могут попросить найти большую или малую полуось эллипса, перифокусное или апофокусное расстояние, эксцентриситет, фокальный параметр, прицельный параметр; в этих случаях вышеупомянутые математические сведения также могут сильно пригодиться¹.

Следует отметить, что теоретический материал данного листка по сложности и широте охвата существенно превосходит тот уровень, который необходим для решения задач международных олимпиад (не говоря уже о Всероссийской). Но если вам удастся этот материал проработать, то вы получите бесценное ощущение полного понимания сложного физического вопроса, когда никакой факт не «свалился с неба» и все связи прослеживаются начиная от базовых принципов. Ну и в качестве приятного бонуса вы обнаружите, что олимпиадные задачи теперь решаются гораздо проще, и более того — что ваши правильные решения могут отличаться от авторских (ведь способность найти альтернативное решение есть следствие глубокого понимания физической сути и свободного владения математическим аппаратом).

¹Авторское решение олимпиадной задачи обычно оперирует лишь законами Кеплера и физическими соображениями, но если вдруг указанные соображения в голову не приходят, то можно выкрутиться чисто математически. Поэтому полезно знать — как.

1 Эллипс

Воткнём две иголки на расстоянии $2c$ друг от друга и прикрепим к ним нитку длиной $2a > 2c$. Оттянем нитку острым карандашом и прочертим линию, сохраняя нитку натянутой. В результате получится *эллипс*, а иголки — его *фокусы* (смотрите гифку).

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов эллипса) есть величина постоянная (бóльшая расстояния между фокусами).

ЗАДАЧА 1. (*Каноническое уравнение эллипса*) Выберем оси x, y прямоугольной декартовой системы координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 имели координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ соответственно. Для произвольной точки $M(x, y)$ обозначим $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ (так называемые фокальные радиусы). Пусть $a > c$.

- Покажите, что определение эллипса $r_1 + r_2 = 2a$ приводит к *каноническому уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ — *малая полуось* эллипса. Величина a называется *большой полуосью*.

- Постройте эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Отметьте его большую и малую полуоси.

ЗАДАЧА 2. Убедитесь, что окружность есть частный случай эллипса.

ЗАДАЧА 3. Покажите, что эллипс является ортогональной проекцией окружности на плоскость. Выведите отсюда формулу площади эллипса: $S = \pi ab$.

ЗАДАЧА 4. Предположим, что один из фокусов эллипса (пусть это будет F_1) нас интересует особо (например, там расположено Солнце). *Перицентр* P есть точка эллипса, ближайшая к этому фокусу; *апоцентр* A — точка эллипса, наиболее удалённая от этого фокуса². Величины $r_p = PF_1$ и $r_a = AF_1$ называются соответственно *перифокусным* и *апофокусным расстоянием*. Выразите эти расстояния через a и c .

$$c + v = r_p; c - v = r_a$$

ЗАДАЧА 5. *Эксцентриситет* эллипса есть величина $e = c/a$. Заметим, что $0 \leq e < 1$.

- 1) Что представляет собой эллипс с нулевым эксцентриситетом?
- 2) Как меняется эллипс при увеличении эксцентриситета?
- 3) Выразите b, r_p и r_a через a и e .

$$(e + 1)v = r_p; (e - 1)v = r_a; \frac{e^2 - 1}{2e} v = b$$

ЗАДАЧА 6. *Фокальный параметр* — это половина длины хорды эллипса, проходящей через фокус перпендикулярно прямой F_1F_2 (иными словами, в выбранной выше системе координат это положительная ордината точки эллипса, имеющей абсциссу c). Выразите фокальный параметр p через a и b ; через a и e .

$$(e^2 - 1)v = \frac{v}{e^2} = d$$

²В случае спутников Земли для этих точек используются названия *перигей* и *апогей*, а при рассмотрении движения планет вокруг Солнца — *перигелий* и *апогелий* (*афелий*).

ЗАДАЧА 7. Покажите, что большая полуось есть среднее арифметическое перифокусного и апофокусного расстояний, малая полуось — их среднее геометрическое, а фокальный параметр — их среднее гармоническое:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}, \quad b = \sqrt{r_p r_a}, \quad p = \frac{2r_p r_a}{r_p + r_a}.$$

ЗАДАЧА 8. Положение точки на плоскости задаётся двумя числами — например, декартовыми координатами (x, y) . Во многих случаях удобны *полярные координаты* (r, φ) точки M , где r есть расстояние от M до *полюса* — фиксированной точки O плоскости (то есть длина радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$), а φ — угол между радиус-вектором \vec{r} и фиксированной осью (так называемой *полярной осью*).

Запишите каноническое уравнение эллипса в полярных координатах, расположив полюс в центре симметрии эллипса и приняв ось x (рассмотренной выше системы координат) в качестве полярной оси.

$$\frac{r}{1 - e \cos \varphi} = a$$

ЗАДАЧА 9. Уравнение, полученное в предыдущей задаче, особой роли не играет. Гораздо важнее другое представление эллипса в полярных координатах: полярная ось остаётся той же, полюс помещаем в фокус F_1 , а в качестве двух параметров, задающих эллипс, берём фокальный параметр p и эксцентриситет e . Покажите, что уравнение эллипса окажется таким:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Что изменится в этом уравнении, если в качестве полюса взять F_2 ?

2 Гипербола

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (фокусов гиперболы) есть величина постоянная: $|MF_1 - MF_2| = 2a = \text{const}$.

ЗАДАЧА 10. Положим $F_1 F_2 = 2c$. Докажите, что $a < c$.

ЗАДАЧА 11. (*Каноническое уравнение гиперболы*) Опять рассмотрим прямоугольную систему координат, в которой фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ соответственно.

- Действуя аналогично случаю эллипса, выведите каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Величина a по-прежнему называется *большой полуосью* гиперболы, а вот малой полуоси у неё нет (величина b , как мы увидим ниже, имеет другой геометрический смысл).

- Покажите, что прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ являются наклонными асимптотами гиперболы.
- Изобразите гиперболу $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ЗАДАЧА 12. *Эксцентриситетом* гиперболы по-прежнему называется величина $e = c/a$. Заметим, что теперь $e > 1$. Как меняется гипербола при увеличении эксцентриситета?

ЗАДАЧА 13. *Перицентр* есть точка гиперболы, ближайшая к данному фокусу (апоцентр для гиперболы не определён). Расстояние от этого фокуса до перицентра называется *перифокусным расстоянием* и обозначается r_p . Выразите r_p через a и c ; через a и e .

$$(1 - e)v = v - c = a_1$$

ЗАДАЧА 14. *Фокальный параметр* — это половина длины хорды гиперболы, проходящей через фокус перпендикулярно прямой F_1F_2 (иными словами, в выбранной выше системе координат это положительная ордината точки гиперболы, имеющей абсциссу c). Выразите фокальный параметр p через a и b ; через a и e .

$$(1 - e^2)v = \frac{v}{e^2} = d$$

ЗАДАЧА 15. *Прицельный параметр* — это расстояние от фокуса гиперболы до её асимптоты. Покажите, что прицельный параметр равен b .

Примечание. Физический смысл прицельного параметра состоит в следующем. Пусть комета огибает Солнце по гиперболической траектории (в фокусе которой Солнце как раз и находится). Тогда на бесконечности комета движется вдоль асимптоты, и прицельный параметр есть плечо импульса кометы (относительно Солнца) на бесконечности. Таким образом, момент импульса кометы равен $mv_\infty b$.

ЗАДАЧА 16. (*Уравнение гиперболы в полярных координатах*) Расположим полюс в фокусе F_1 , а угол φ будем отсчитывать от *отрицательной* полуоси x (иными словами, полярная ось, как и в случае эллипса, «смотрит» на ближайшую вершину гиперболы). Покажите, что уравнение правой ветви гиперболы в таких полярных координатах идентично уравнению эллипса:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

(но теперь $e > 1$).

3 Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной прямой (*директрисы*) и данной точки (*фокуса*).

ЗАДАЧА 17. (*Каноническое уравнение параболы*) Пусть расстояние от фокуса до директрисы равно p . Выберем прямоугольную систему координат, в которой фокус имеет координаты $(p/2, 0)$, а директриса, следовательно, задаётся уравнением $x = -p/2$. Выведите каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Нарисуйте параболу $y^2 = 2x$.

ЗАДАЧА 18. Обозначение p выбрано не случайно. Убедитесь, что p есть фокальный параметр параболы (определение фокального параметра тут ничем не отличается от случаев эллипса и гиперболы).

ЗАДАЧА 19. (*Уравнение параболы в полярных координатах*) Расположим полюс в фокусе параболы, а полярную ось направим к её вершине (то есть в сторону отрицательной полуоси x —

как в случае гиперболы). Покажите, что в таких полярных координатах парабола задаётся уравнением

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}.$$

4 Конические сечения

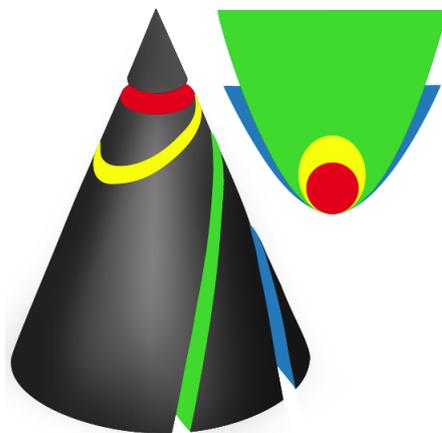
Мы видим, что уравнение параболы в полярных координатах получается из соответствующего уравнения для эллипса или гиперболы, если положить $e = 1$. Таким образом, все три вида кривых второго порядка — эллипс, гипербола и парабола — описываются одним и тем же уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

При $0 \leq e < 1$ это уравнение даёт эллипс, при $e = 1$ — параболу, а при $e > 1$ — гиперболу.

Существует красивая геометрическая интерпретация данного факта. Оказывается, что эллипс, парабола и гипербола — это три вида *конических сечений*, то есть сечений прямого кругового конуса плоскостью (см. рисунок³).

Пусть вначале секущая плоскость перпендикулярна оси конуса: тогда в сечении имеем окружность ($e = 0$, красное сечение). Будем поворачивать плоскость, постепенно уменьшая угол с осью конуса: в сечении получаются эллипсы, эксцентриситет которых постепенно увеличивается (жёлтое сечение). Наконец, наступает критический момент, когда плоскость становится параллельна образующей конуса: эксцентриситет обращается в единицу, эллипс «рвётся» и превращается в параболу (зелёное сечение). Стоит немного шевельнуть плоскость дальше — и уже мы имеем в сечении кривую с $e > 1$, то есть гиперболу (голубое сечение).



Таким образом, можно сказать, что парабола — это вырожденный случай, своего рода граница между соответствующими семействами эллипсов и гипербол с одним и тем же значением фокального параметра p .

Теперь мы полностью готовы перейти к физике.

5 Задача двух тел

Рассмотрим две материальные точки массами M и m ; впоследствии тело M будет притягивающим центром (например, Солнцем), а тело m — частицей, движение которой нас интересует (например, планетой).

Пусть \vec{r} — радиус-вектор, проведённый от точки M к точке m (он «отслеживает» относительное движение — тела m относительно тела M). Введём обозначения: C — центр масс рассматриваемых тел; \vec{r}_1 — радиус-вектор тела m , проведённый из C ; \vec{r}_2 — радиус-вектор тела M , проведённый из C .

ЗАДАЧА 20. Выразите \vec{r}_1 и \vec{r}_2 через M , m и \vec{r} .

$$\vec{r} = \frac{m+M}{m} \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{r} = \frac{m+M}{M} \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

³Ссылка на оригинал.

ЗАДАЧА 21. Покажите, что суммарная кинетическая энергия в системе центра масс

$$K = \frac{m\dot{r}_1^2}{2} + \frac{M\dot{r}_2^2}{2}$$

равна

$$K = \frac{\mu\dot{r}^2}{2},$$

где $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ — приведённая масса.

ЗАДАЧА 22. В интересующих нас ситуациях выполнено $M \gg m$. Покажите, что в таком случае центр масс фактически совпадает с точкой M , а для кинетической энергии системы тел имеем

$$K = \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Следовательно, можно считать притягивающий центр M неподвижным и относительно него рассматривать движение тела m .

ЗАДАЧА 23. Пусть $d\vec{r}$ — малое приращение радиус-вектора \vec{r} . Покажите, что $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$ (слева стоит скалярное произведение векторов; буква без стрелочки означает модуль соответствующего вектора). Это можно сделать двумя способами:

- 1) продифференцировать равенство $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$;
- 2) с помощью рисунка понять геометрический смысл доказываемого равенства.

ЗАДАЧА 24. Пусть $F = \frac{GMm}{r^2}$ — сила всемирного тяготения, действующая на тело m со стороны тела M . Выразите вектор \vec{F} через G , M , m и \vec{r} . Покажите, что $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr$.

ЗАДАЧА 25. Пусть тело m переместилось из точки 1 с радиус-вектором \vec{r}_1 в точку 2 с радиус-вектором \vec{r}_2 . Покажите, что работа силы всемирного тяготения

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

не зависит от формы траектории и равна

$$A = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Данное обстоятельство позволяет ввести потенциальную энергию гравитационного взаимодействия тел M и m :

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

(нулевой уровень потенциальной энергии, как обычно в подобных ситуациях, выбран на бесконечности).

ЗАДАЧА 26. Убедитесь, что $A = -\Delta U$. Таким образом, если гравитационное поле совершает положительную работу, то потенциальная энергия взаимодействующих тел уменьшается; наоборот, если мы удаляем друг от друга притягивающиеся тела, увеличивая тем самым их потенциальную энергию, то поле совершает при этом отрицательную работу.

6 Сохранение энергии и момента импульса

В дальнейшем для краткости обозначаем $\alpha = GMm$. Выражение для полной механической энергии $E = K + U$ движущегося тела примет вид

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r}.$$

ЗАДАЧА 27. (*Теорема о кинетической энергии*) Докажем вначале общую теорему механики: *работа, совершённая внешней силой над телом (материальной точкой), равна изменению кинетической энергии тела.*

Пусть тело переместилось из точки 1 в точку 2. Имеем:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \dots = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta K.$$

Восстановите пропуск, обозначенный многоточием.

ЗАДАЧА 28. С помощью установленных фактов ($A = \Delta K$ — всегда; $A = -\Delta U$ — для гравитационного взаимодействия) покажите, что имеет место закон сохранения энергии: *полная механическая энергия движущегося тела*

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$$

остаётся неизменной.

Итак, при движении тела m его полная энергия E сохраняется. Оказывается, есть и другая сохраняющаяся величина, причём векторная — момент импульса \vec{L} .

Напомним, что момент импульса тела m относительно точки M — это векторное произведение радиус-вектора тела, проведённого из M , на импульс тела:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

Аналогично, если к телу m приложена сила \vec{F} , то момент силы \vec{M} относительно точки M есть

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

ЗАДАЧА 29. Согласно второму закону Ньютона имеем $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (производная вектора импульса тела по времени равна приложенной к телу силе). С учётом этого равенства покажите, что производная вектора момента импульса по времени равна моменту силы, приложенной к телу:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}.$$

ЗАДАЧА 30. Если \vec{F} — сила гравитационного притяжения тела m к телу M , то момент силы \vec{F} относительно M равен нулю. Почему? Выведите отсюда, что $\vec{L} = \text{const}$, то есть *момент импульса тела m относительно точки M сохраняется.*

ЗАДАЧА 31. Сохранение векторной величины — это неизменность её модуля и неизменность направления. Из неизменности направления момента импульса заключите, что тело m совершает *плоское движение*, то есть орбита целиком расположена в некоторой плоскости.

7 Уравнение движения в полярных координатах

Дальнейшее изучение движения тела m мы будем проводить в полярной системе координат, полюс которой расположим в точке M , а полярную ось выберем пока произвольно (впоследствии мы конкретизируем выбор полярной оси так, чтобы обратить в нуль некую константу интегрирования). Таким образом, положение тела m определяется двумя числами:

- 1) длиной r радиус-вектора \vec{r} , проведённого из M ;
- 2) углом φ между радиус-вектором \vec{r} и полярной осью.

ЗАДАЧА 32. В прямоугольной системе координат для вектора скорости \vec{v} (как и вообще для всякого вектора) мы рассматриваем его компоненты v_x и v_y . Точно так же в полярной системе координат мы для скорости \vec{v} можем рассмотреть её радиальную v_r и азимутальную v_φ компоненты.

Радиальная компонента v_r — это просто скорость изменения расстояния до полюса, а величина v_φ есть скорость азимутального движения (в направлении, перпендикулярном радиус-вектору). Объясните равенства:

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2, \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad L = mr^2\dot{\varphi}.$$

Таким образом, при движении тела m сохраняются величины

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}, \quad (1)$$

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (2)$$

ЗАДАЧА 33. Теперь мы можем доказать второй закон Кеплера. Он легко вытекает из закона сохранения момента импульса. Покажите это.

ЗАДАЧА 34. Продифференцируйте по времени сохраняющиеся величины E , L и получите уравнение движения

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

8 Эффективная потенциальная энергия

Теперь мы уже способны составить качественное представление о характере движения тела m в зависимости от его энергии E .

ЗАДАЧА 35. Исключим из (1) и (2) величину $\dot{\varphi}$. Получите соотношение

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (3)$$

ЗАДАЧА 36. Обозначим

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Тогда равенство (3) примет вид

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r).$$

Это — полная механическая энергия одномерного движения тела вдоль координаты r с потенциальной энергией $V(r)$. Функцию $V(r)$ можно назвать *эффективной потенциальной энергией*. Исследование данной функции позволит нам продвинуться в изучении движения тела m .

- 1) Изобразите (качественно) график функции $V(r)$.
- 2) Найдите точку минимума r_0 функции $V(r)$. Выразите наименьшее значение V_0 функции $V(r)$ через α и r_0 .

$$\frac{zTz}{z^2v_{uu}} = 0\Lambda : \frac{v_{uu}}{zT} = 0\Lambda (z)$$

ЗАДАЧА 37. Продолжаем работать с функцией $V(r)$. Будем пересекать этот график горизонтальными прямыми $V = E$ при разных E , то есть смотреть, какая картина будет получаться при различных значениях энергии E тела m . Заодно сопоставляем наши наблюдения с картиной конических сечений, рассмотренной выше.

1) Пусть вначале $E = V_0$. Убедитесь, что этот случай соответствует движению тела m по круговой орбите (красное сечение!). Выведите формулу для скорости: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$. Покажите, что $V_0 = -\frac{GMm}{2r_0}$, а кинетическая энергия $K = \frac{GMm}{2r_0}$.

2) Пусть теперь $V_0 < E < 0$. Тело m «колеблется в потенциальной яме», совершая *финитное движение* (то есть двигается в ограниченной области пространства). Ниже мы покажем, что этот случай отвечает движению тела по *эллиптической орбите* (жёлтое сечение). Каким параметрам эллипса соответствуют точки поворота — абсциссы точек пересечения графика $V(r)$ с прямой $V = E$?

3) Пусть $E = 0$. Как видите, движение становится *инфинитным* — тело m уходит на бесконечность. Как вы думаете, по какой траектории?

4) Пусть $E > 0$. Движение и подавно инфинитно. Какова траектория движения?

5) В последних двух случаях ($E \geq 0$) дайте физическую интерпретацию абсциссы единственной точки пересечения графика $V(r)$ и прямой $V = E$.

6) Объясните ситуацию при $E < V_0$.

9 Один табличный интеграл

Теперь нам нужно понять формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (4)$$

и научиться ею пользоваться.

ЗАДАЧА 38. (*Производная обратной функции*) Мы знаем, что $(e^x)' = e^x$. Как с помощью этого равенства найти производную обратной функции $y = \ln x$? Давайте выразим отсюда x :

$$x = e^y,$$

и продифференцируем полученное равенство по x :

$$1 = e^y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Действуя аналогично, найдите производную функции $y = \arcsin x$. После этого проверьте формулу (4) дифференцированием.

ЗАДАЧА 39. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}.$$

Указание. Выделите полный квадрат.

$$\mathcal{D} + \frac{z}{\xi - x} \text{ uтсoтe}$$

ЗАДАЧА 40. Объясните, почему

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + C.$$

10 Уравнение траектории в полярных координатах

Сейчас нам предстоит финальная и технически трудная часть всей этой теории. Возвращаемся нашим сохраняющимся величинам (1) и (2):

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}, \quad L = mr^2 \dot{\varphi}$$

и следствию из этих формул — выражению (3):

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

ЗАДАЧА 41. Выразите отсюда производные как функции только r :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\dots}$$

и поделите второе выражение на первое. Должно получиться

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{m}{L} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}.$$

ЗАДАЧА 42. Сделайте замену $z = 1/r$ и выделите полный квадрат. Должно получиться

$$\frac{dz}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2mEL^2 + m^2\alpha^2}{L^4} - \left(z - \frac{m\alpha}{L^2} \right)^2}.$$

ЗАДАЧА 43. Перепишав это в виде

$$\pm d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2mEL^2 + m^2\alpha^2}{L^4} - \left(z - \frac{m\alpha}{L^2} \right)^2}},$$

интегрируем через арккосинус:

$$\pm\varphi + C = \arccos(\dots)$$

(знак перед \arccos взяли «плюс», так как перед φ всё равно пока стоит «плюс-минус»).

ЗАДАЧА 44. Теперь вспомним, что выбор полярной оси (от которой отсчитывается угол φ) у нас был произволен. Выберем её так, чтобы константа интегрирования C обратилась в нуль. Иными словами, без ограничения общности просто полагаем $C = 0$ в последней формуле.

А как быть с «плюс-минусом»? Легко понять, что эта неопределённость отвечает двум различным направлениям движения тела m (по часовой стрелке или против часовой). Направление движения нас не интересует, поэтому без ограничения общности оставляем «плюс».

Завершите преобразования и получите формулу:

$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \varphi}. \quad (5)$$

Как видим, соотношение (5) есть уравнение конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

с фокальным параметром

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} \quad (6)$$

и эксцентриситетом

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad (7)$$

ЗАДАЧА 45. Убедитесь, что при $-\frac{m\alpha^2}{2L^2} < E < 0$ тело движется по эллипсу (и посмотрите, кстати, что нижняя граница для E — это в точности V_0 , полученное в задаче 36). Тем самым доказан первый закон Кеплера!

ЗАДАЧА 46. Убедитесь, что при $E = 0$ тело движется по параболе, а при $E > 0$ — по гиперболе (что подтверждает наши догадки, сделанные в пунктах 3 и 4 задачи 37).

11 Доказательство третьего закона Кеплера

Это последний пункт программы, который необходимо выполнить. Для эллиптической орбиты будем искать отношение T^2/a^3 , где T — период обращения, a — большая полуось.

ЗАДАЧА 47. Пусть за малое время dt радиус-вектор \vec{r} тела m заметает малый сектор площади $dS = \frac{1}{2}r^2d\varphi$. Отсюда и из формулы $L = mr^2\dot{\varphi}$ покажите, что

$$T = \frac{2\pi tab}{L}.$$

ЗАДАЧА 48. Используя результат задачи 6 и соотношения (6), (7), выведите выражение для полной энергии:

$$E = -\frac{\alpha}{2a}.$$

ЗАДАЧА 49. Используя формулу из задачи 5, покажите, что

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}} = L\sqrt{\frac{a}{m\alpha}}.$$

ЗАДАЧА 50. Докажите третий закон Кеплера, показав, что

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

12 Задачи

ЗАДАЧА 51. (Всеросс., 1993, ОЭ, 11) По диаметру астероида, который имеет форму шара, проходит узкий тоннель. С поверхности астероида в тоннель бросили камень, сообщив ему скорость, равную первой космической для этого астероида. Через какое время камень вернётся назад? Известно, что минимальный период обращения космических объектов вокруг астероида равен T_0 ; астероид состоит из однородного вещества, а влияние гравитационного поля других небесных тел мало.

Примечание. Площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — длины полуосей эллипса.

$$\left(\frac{v}{v_1} + 1 \right) \rho_L = \rho$$

ЗАДАЧА 52. (Всеросс., 2005, финал, 11) Предположим, что в результате какой-то космической катастрофы Луна остановилась в своём орбитальном движении вокруг Земли. Определите, сколько времени τ Луна будет падать на Землю и с какой относительной скоростью v планеты столкнутся. Расстояние от Земли до Луны $L = 3,84 \cdot 10^5$ км, радиус Земли $R = 6370$ км. Массу и размер Луны можно считать малыми по сравнению с массой и размером Земли.

$$\rho/m \cdot z^2 \Gamma = \mu \beta z \Lambda = a : \rho \cdot 6 \Gamma^4 = \frac{z \mu \beta 8}{\epsilon \Gamma} \Lambda_{\nu} = \rho$$

ЗАДАЧА 53. (Всеросс., 2007, финал, 11) В вакууме на расстоянии $L = 10$ см друг от друга находятся протон p^+ и антипротон p^- . Обе частицы имеют одинаковые массы $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг и одинаковые по модулю заряды $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл. В первый момент частицы неподвижны. При сближении частиц на расстояние $x = 10^{-13}$ м происходит их аннигиляция с рождением γ -квантов.

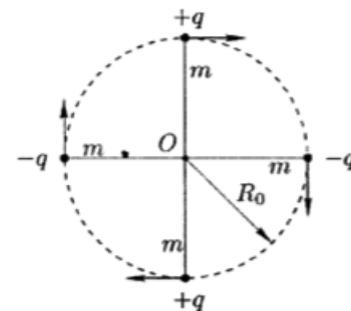
- 1) Какие скорости будут иметь частицы при таком сближении?
- 2) Через какое время произойдёт аннигиляция частиц?
- 3) Нужно ли при решении задачи учитывать гравитационные силы, действующие между частицами? Ответ поясните расчётом.

Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ Кл²/(Н · м²).

Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².

$$\rho \text{ н } (\epsilon : \rho \text{ м } \rho 9 = \frac{z \mu \beta 8}{\epsilon \Gamma \mu 0 \beta \epsilon \nu} \Lambda = \rho \text{ (} z : \rho / \text{м } 9 0 \Gamma \cdot \rho \Gamma^4 = \frac{x \mu 0 \beta \mu \nu \Lambda}{\epsilon} = a \text{ (} \Gamma$$

ЗАДАЧА 54. (Всеросс., 2010, финал, 11) В свободном пространстве на окружности радиуса R_0 в вершинах вписанного квадрата расположены четыре точечные массы m . Две из них несут заряд $+q$, а две другие $-q$ (рис.). В начальный момент этим материальным точкам сообщают одинаковые по модулю скорости, направленные по касательной к окружности по часовой стрелке.



Известно, что достигаемое в процессе движения минимальное расстояние от любой из точечных масс до центра O начальной окружности равно R_1 ($R_1 < R_0$). Считайте, что в любой момент времени заряды находятся в вершинах квадрата с центром в точке O . Действием гравитационных сил можно пренебречь.

- 1) Выполните необходимые расчёты и определите траектории движения материальных точек.
- 2) Определите характерное время движения материальных точек.

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{b}{2}}}{g(1+0R+0m)h0\varepsilon z} \sqrt{yz} = L$$

ЗАДАЧА 55. (Всеросс., 1995, финал, 11) Заголовок газетной статьи: *Со скоростью 130 тысяч километров в час прочь от Земли* (Борис Лысенко, «Известия», 21 февраля 1995).

«Два ветерана американской космонавтики снова и снова удивляют своими неожиданными резервами энергии во время полёта из Солнечной системы в карусель Млечного пути.

В 1972 и 1973 годах с Земли к центру Млечного пути отправились два американских зонда — «Пионер-10» и «Пионер-11». Зонды летят по орбите, двигаясь по которой смогут вернуться на Землю лишь через 250 миллионов лет.

За прошедшие двадцать с лишним лет оба «Пионера» благополучно прошли астероидный пояс и со скоростью 130 тысяч километров в час удаляются от Солнечной системы и находятся на расстоянии десяти миллиардов километров. Из-за огромного расстояния сигналы от спутников поступают на Землю с опозданием на 12 часов.

Космические корабли будут функционировать до тех пор, пока не иссякнут термоэлектрические генераторы, вырабатывающие энергию. В целях экономии на борту кораблей в рабочем состоянии находятся лишь жизненно важные приборы.

Зонды измеряют «солнечный ветер», выясняют влияние гравитации на систему внешних планет, а также ищут доказательство наличия так называемых гравитационных волн, которые со скоростью света распространяют поле тяготения небесных тел.

На случай встречи в бесконечных пространствах Вселенной с инопланетянами ученые из НАСА на борту «Пионера» прикрепили таблицу, на которой изображены мужчина и женщина, а также наша Солнечная система».

Используя данные из второго абзаца приведённой заметки, оцените, на какое максимальное расстояние от Солнца могут удалиться эти космические аппараты в течение ближайшего миллиарда лет. Как изменится ответ, если использовать данные не второго, а третьего абзаца? Влиянием космических объектов вне Солнечной системы можно пренебречь. В стиле газетной публикации добавим, что свет от Солнца до Земли идёт около 8 мин.

$$L \approx 1,2 \cdot 10^{14} \text{ км (второй абзац)}; L \approx 7 \cdot 10^{18} \text{ км (третий абзац)}$$

ЗАДАЧА 56. (*APhO, 2003*)

- [Satellite's orbit transfer.](#)
- [Solution.](#)

ЗАДАЧА 57. (*IPhO, 2005*)

- [An ill fated satellite.](#)
- [Solution.](#)

ЗАДАЧА 58. (*APhO, 2017*)

- [Эволюция системы бинарных сверхмассивных чёрных дыр / Evolution of Supermassive Black Holes Binary.](#)
- [Solution.](#)