

Интеграл. Механика

Данный листок посвящён применению интеграла в задачах механики.

ЗАДАЧА 1. Тело движется вдоль оси x с постоянным ускорением a . Дважды интегрируя равенство $\ddot{x} = a$, получите зависимость скорости v и координаты x тела от времени. В начальный момент $t = 0$ скорость и координата тела равны соответственно v_0 и x_0 .

$$\frac{v}{v_0} + \frac{a}{v_0^2} x = \frac{v^2}{2v_0^2} + \frac{ax}{v_0^2} = \frac{v^2}{2v_0^2} + \frac{ax}{v_0^2} = a$$

ЗАДАЧА 2. Найдите зависимость координаты тела от времени, если тело движется вдоль оси x с ускорением $a = a_0 + bt$. В начальный момент $t = 0$ скорость и координата тела равны соответственно v_0 и x_0 .

$$\frac{v}{v_0} + \frac{a_0}{v_0^2} x + \frac{b}{6v_0^2} x^2 = \frac{v^2}{2v_0^2} + \frac{a_0 x}{v_0^2} + \frac{bx^2}{6v_0^2} = x$$

ЗАДАЧА 3. Тело массой m совершает вынужденные колебания под действием периодической силы $F = F_0 \sin \omega t$. Найдите амплитуду колебаний тела.

$$\frac{m\omega^2}{F_0} = V$$

ЗАДАЧА 4. (*Теорема о кинетической энергии*) Докажите, что изменение кинетической энергии тела равно работе результирующей внешней силы, приложенной к телу. (Сила может быть переменной!)

ЗАДАЧА 5. Покажите, что потенциальная энергия гравитационного взаимодействия точечных тел массами m_1 и m_2 имеет вид $W = Gm_1m_2/r$, где r — расстояние между телами.

Указание. Вычислите работу, которую совершает сила тяготения при сближении тел от расстояния r_1 до расстояния r_2 .

ЗАДАЧА 6. Выведите формулу потенциальной энергии деформированной пружины $W = kx^2/2$.

ЗАДАЧА 7. Аквариум, имеющий форму куба со стороной a , заполнен водой. Найдите силу давления воды на боковую стенку аквариума. Плотность воды равна ρ .

$$\frac{\rho g a^3}{6} = F$$

ЗАДАЧА 8. Русло реки имеет в разрезе форму равнобедренной трапеции с верхним основанием a , нижним основанием b ($b < a$) и высотой h . Найдите силу давления воды на плотину, которая перегораживает реку. Плотность воды равна ρ .

$$(a + b) \rho g h^2 = F$$

ЗАДАЧА 9. Какое давление оказывал бы на поверхность Земли однородный железный столб, высота которого равна радиусу Земли? Плотность железа $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Землю считать шаром радиуса $R = 6400 \text{ км}$.

$$\rho g R^2 \approx 10^{11} \text{ Па} = p$$

ЗАДАЧА 10. («Росатом», 2013, 11) Имеется жидкая планета в форме однородного шара радиуса R и плотности ρ . Найти давление в центре планеты, обусловленное гравитационным притяжением.

$$\int_0^R \rho g r dr = p$$

ЗАДАЧА 11. Лодка длины L , двигаясь по инерции, наезжает на берег и останавливается из-за трения, когда половина её длины оказывается на суше. Найдите начальную скорость лодки. Коэффициент трения равен μ .

$$\mu mg L/2 = mv^2/2$$

ЗАДАЧА 12. Однородный цилиндр массы m с площадью основания S приклеен верхним основанием к потолку. Найдите относительное удлинение цилиндра под действием силы тяжести. Модуль Юнга вещества цилиндра равен E .

$$\frac{S \Delta l}{l_0} = \frac{mg}{E S}$$

ЗАДАЧА 13. Какую работу нужно совершить, чтобы доску длиной l и массой m , лежащую на земле, повернуть в горизонтальной плоскости на угол φ вокруг одного из концов? Коэффициент трения равен μ .

$$\int_0^l \mu mg dx \sin \varphi = A$$

ЗАДАЧА 14. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы целиком погрузить в жидкость однородный конус, двигая его вершиной вниз? Плотность жидкости ρ , объём конуса V , его высота h .

$$\rho g V h/3 = A$$

ЗАДАЧА 15. Какую работу необходимо совершить, чтобы насыпать кучу песка в форме конуса с площадью основания S и высотой h ? Плотность песка равна ρ .

$$\int_0^h \rho g S x dx = A$$

ЗАДАЧА 16. Найдите потенциальную энергию стоящего на основании однородного конуса массой m и высотой h . Сделайте вывод о положении центра масс конуса.

$$m g h/4 = A$$

ЗАДАЧА 17. Найдите положение центра масс а) однородного полушара; б) однородного полукруга; в) однородной тонкой полусферы. Радиус равен R .

$$\frac{3}{8} R; \frac{3}{8} R; \frac{3}{8} R$$

ЗАДАЧА 18. Найдите кинетическую энергию прямого однородного стержня массы m и длины l , вращающегося с угловой скоростью ω . Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его а) конец; б) середину.

$$\frac{1}{2} I \omega^2$$

ЗАДАЧА 19. Найдите кинетическую энергию вращения однородного тонкого кольца массы m и радиуса R . Ось вращения проходит через центр кольца и а) перпендикулярна плоскости кольца; б) лежит в плоскости кольца. Угловая скорость вращения равна ω .

$$\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \quad (9); \quad \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \quad (в)$$

ЗАДАЧА 20. Найдите кинетическую энергию вращения однородного тонкого диска массы m и радиуса R . Ось вращения проходит через центр диска и а) перпендикулярна плоскости диска; б) лежит в плоскости диска. Угловая скорость вращения равна ω .

$$\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \quad (6); \quad \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \quad (в)$$

ЗАДАЧА 21. Найдите кинетическую энергию вращения однородной тонкой пластины массы m , имеющей форму равностороннего треугольника со стороной a . Вращение происходит вокруг одной из сторон пластины. Угловая скорость вращения равна ω .

$$\frac{1}{6} m a^2 \omega^2$$

ЗАДАЧА 22. Найдите кинетическую энергию вращения однородного конуса вокруг своей оси. Масса конуса m , радиус основания R , угловая скорость ω .

$$\frac{3}{8} m R^2 \omega^2$$

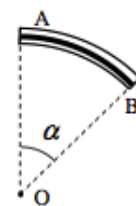
ЗАДАЧА 23. Найдите кинетическую энергию вращения однородной тонкой сферы, если ось вращения проходит через её центр. Масса сферы m , радиус R , угловая скорость ω .

$$\frac{2}{5} m R^2 \omega^2$$

ЗАДАЧА 24. Найдите кинетическую энергию вращения однородного шара, если ось вращения проходит через его центр. Масса шара m , радиус R , угловая скорость ω .

$$\frac{2}{5} m R^2 \omega^2$$

ЗАДАЧА 25. («Росатом», 2012, 11) Тонкая трубка изогнута в виде дуги окружности AB , опирающейся на угол $\alpha = 45^\circ$, и закреплена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке: точка O — центр окружности, радиус OA перпендикулярен поверхности земли. Внутри трубки удерживают гибкую нерастяжимую верёвку. Длина верёвки равна длине трубки. Верёвку отпускают и она начинает двигаться. Найти ускорение верёвки в этот момент. Трение отсутствует.



$$g \frac{v}{\sqrt{2-v^2}} = v$$