Интеграл. Электродинамика

Данный листок посвящён применению интеграла в задачах электродинамики.

Задача 1. Покажите, что потенциальная энергия кулоновского взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2 имеет вид $W = kq_1q_2/r$, где r — расстояние между зарядами. (Величины q_1 и q_2 могут быть как положительными, так и отрицательными!)

Задача 2. Выведите формулу для энергии заряженного конденсатора: $W = q^2/(2C)$.

Задача 3. Покажите, что любой заряженный проводник обладает энергией $W = q\varphi/2$, где q — заряд проводника, φ — его потенциал.

Указание. Потенциал проводника прямо пропорционален его заряду: $\varphi = \alpha q$.

Задача 4. Сила тока в цепи за время t равномерно увеличилась от нуля до I. Какой заряд прошёл по цепи за это время?

$q = \frac{1}{2}It$

Задача 5. В проводнике сопротивлением 40 Ом сила тока линейно возрастала от начального значения 5 А до конечного значения 25 А в течение 10 с. Какое количество теплоты выделилось в проводнике за это время?

25 кДж

Задача 6. Найдите напряжённость поля равномерно заряженного тонкого кольца радиуса a в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии r от центра. Заряд кольца равен q. Какой вид приобретает формула при $r \gg a$?

$E = \frac{kqr}{(r^2+a^2)^{3/2}}$; $E = \frac{kq}{r^2}$ при $r \gg a$

Задача 7. Найдите напряжённость поля равномерно заряженного тонкого диска радиуса a в точке, находящейся на оси диска на расстоянии r от центра. Заряд диска равен q. Покажите, что при $r \gg a$ полученная формула переходит в формулу напряжённости поля точечного заряда, а при $r \ll a$ — в формулу напряжённости поля заряженной плоскости.

$E = \frac{2kq}{a^2}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)$

Задача 8. Найдите напряжённость поля бесконечно длинной равномерно заряженной тонкой нити: а) по теореме Гаусса; б) непосредственным интегрированием. Точка наблюдения находится на расстоянии r от нити. Линейная плотность заряда нити равна λ.

$E = \frac{2k\lambda}{r}$

Задача 9. Найдите напряжённость поля равномерно заряженной плоскости: а) по теореме Гаусса; б) непосредственным интегрированием. Точка наблюдения находится на расстоянии r от плоскости. Поверхностная плотность заряда плоскости равна σ.

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Задача 10. Найдите напряжённость поля равномерно заряженного тонкого стержня длины $2a$ в точке, находящейся на серединном перпендикуляре к стержню на расстоянии r от стержня. Заряд стержня равен q. Покажите, что при $r \gg a$ полученная формула переходит в формулу напряжённости поля точечного заряда, а при $r \ll a$ — в формулу напряжённости поля длинной заряженной нити.

$$\boxed{E = \frac{kq}{r\sqrt{r^2+a^2}}}$$

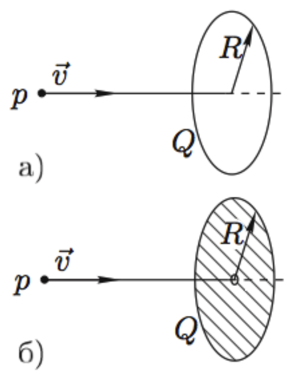
Задача 11. Найдите напряжённость поля равномерно заряженной тонкой прямоугольной пластины в точке, находящейся на перпендикуляре к пластине, проходящем через её центр. Поверхностная плотность заряда пластины равна σ, размеры пластины $2a \times 2b$, расстояние до точки наблюдения равно r. Покажите, что при $r \gg a, b$ полученная формула переходит в формулу напряжённости поля точечного заряда, а при $r \ll a, b$ — в формулу напряжённости поля заряженной плоскости.

$$\boxed{E = 4k\sigma \arcsin\left(\frac{ab}{\sqrt{(r^2+a^2)(r^2+b^2)}}\right)}$$

Задача 12. (*Всеросс., 2008, финал, 10*) 1) Тонкое кольцо радиусом $R = 5$ см однородно заряжено зарядом $Q = +10^{-8}$ Кл (рис. *а*). Какую минимальную скорость $v_{\min}$ нужно сообщить протону, находящемуся вдали от кольца, чтобы он пролетел по оси кольца через его центр?

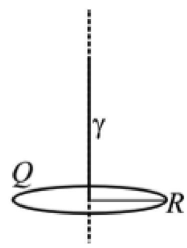
2) Пусть теперь заряд $Q = +10^{-8}$ Кл равномерно распределён по поверхности тонкого диска радиуса $R = 5$ см (рис. *б*). В центре диска имеется небольшое отверстие. Какую минимальную скорость нужно сообщить протону в этом случае, чтобы он пролетел через отверстие в диске?

Элементарный заряд $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



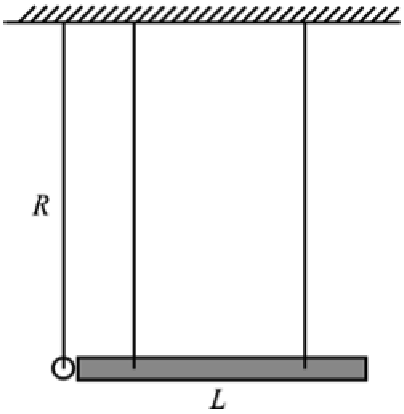
$$\boxed{1)\ v_{\min} = \sqrt{\frac{eQ}{2\pi\varepsilon_0 m_p R}} = 5{,}9 \cdot 10^5 \text{ м/с};\ 2)\ v'_{\min} = v_{\min}\sqrt{2}}$$

Задача 13. (*МОШ, 2010, 10*) Тонкое кольцо радиусом R заряжено зарядом Q, равномерно распределённым по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда γ (см. рисунок). Найти модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.



$$\boxed{F = \frac{k\gamma q}{R}}$$

Задача 14. (*МОШ, 2011, 10*) Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень длиной L, массы которых m одинаковы, подвешены к потолку на нитях одинаковой большой длины $R \gg L$ (см. рисунок). Нити позволяют шарику и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня. Шарику и стержню сообщили одинаковые электрические заряды Q, причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии x окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик сначала находился? Считайте, что диаметр шарика много меньше x, а x много меньше длины стержня.

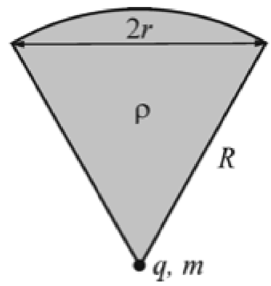


$x \approx Q\sqrt{\frac{2kR}{mgL}}$

Задача 15. (*МОШ, 2011, 11*) Тонкий жёсткий непроводящий стержень длиной L несёт на себе электрический заряд Q, который равномерно распределён по длине стержня. Маленький шарик имеет электрический заряд q и прикреплён к одному из концов стержня тонкой непроводящей и незаряженной нитью длиной R. Какова сила натяжения нити, если система находится в равновесии? Считать, что $Q/q > 0$. Силу тяжести не учитывать.

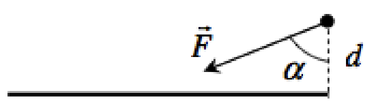
$T = \frac{kQq}{R(R+L)}$

Задача 16. (*«Курчатов», 2015, 10*) Жители далекой планеты τ-Кита используют в качестве пушки устройство, которое работает на основе явления взаимодействия заряженных тел. Они вырезают из равномерно заряженного по объёму шара радиусом R сектор, ограниченный конусом с радиусом r при его основании. Объёмная плотность заряда «пушки» равна $\rho > 0$. К закреплённому орудию подносится маленькая дробинка массой m с зарядом $q > 0$, как показано на рисунке. Потом дробинку отпускают. Определите ускорение дробинки a_0 в момент сразу после её отпускания.



$a_0 = \frac{\rho q r^2}{4\varepsilon_0 m R}$

Задача 17. (*«Росатом», 2012, 11*) Точечный заряд находится на расстоянии d напротив края стержня длиной $10d$, равномерно заряженного зарядом противоположного знака. Найти угол α между вектором силы, действующей на заряд со стороны стержня, и перпендикуляром, опущенным из точки, где находится заряд, на стержень (см. рисунок). Ответ обосновать.

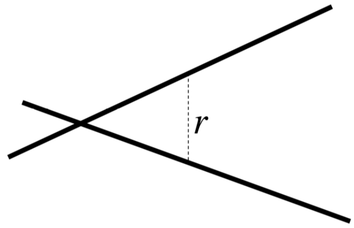


$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 10$

Задача 18. (*«Росатом», 2011, 11*) Две равномерно заряженные полусферы расположены так, что они имеют общий центр, и одна из них вложена в другую (см. рисунок; внутренняя полусфера показана пунктиром). Радиусы полусфер равны R и $3R$, заряды $-Q$ и $2Q$ соответственно. Найти силу взаимодействия полусфер.

$\boxed{F = \frac{kQ^2}{9R^2}}$

Задача 19. (*«Росатом», 2020, 11*) Имеются две диэлектрических бесконечно длинных нити. Нити равномерно заряжены одноименными зарядами с линейной плотностью λ и 2λ. Нити расположили перпендикулярно друг другу в разных плоскостях, причем расстояние между их ближайшими точками равно r. Найти силу взаимодействия нитей. Ответ обосновать.



$\boxed{F = \frac{2\lambda^2}{2\varepsilon_0}}$