# Уравнение состояния идеального газа

*Темы кодификатора ЕГЭ*: модель идеального газа, связь между давлением и средней кинетической энергией теплового движения молекул идеального газа, связь температуры газа со средней кинетической энергией его частиц, уравнение $p = nkT$, уравнение Менделеева — Клапейрона.

Из трёх агрегатных состояний вещества наиболее простым для изучения является газообразное. В достаточно разреженных газах расстояния между молекулами намного больше размеров самих молекул (тогда как в жидкостях и твёрдых телах молекулы «упакованы» весьма плотно). Поэтому силы взаимодействия между молекулами таких газов очень малы.

Для описания разреженных газов в физике используется *модель идеального газа*. В рамках этой модели делаются следующие допущения.

1. Пренебрегаем размерами молекул. Иными словами, молекулы газа считаются материальными точками.

2. Пренебрегаем взаимодействием молекул на расстоянии.

3. Соударения молекул друг с другом и со стенками сосуда считаем абсолютно упругими.

Таким образом, *идеальный газ — это газ, частицы которого являются не взаимодействующими на расстоянии материальными точками и испытывают абсолютно упругие соударения друг с другом и со стенками сосуда.*

## Средняя кинетическая энергия частиц газа

Оказывается, что ключевую роль в описании идеального газа играет средняя кинетическая энергия его частиц.

Частицы газа двигаются с разными скоростями. Пусть в газе содержится $N$ частиц, скорости которых равны $v_1, v_2, \ldots, v_N$. Масса каждой частицы равна $m_0$. Кинетические энергии частиц:

$$E_1 = \frac{m_0 v_1^2}{2}, \quad E_2 = \frac{m_0 v_2^2}{2}, \quad \ldots, \quad E_N = \frac{m_0 v_N^2}{2}.$$

*Средняя кинетическая энергия* $E$ частиц газа — это среднее арифметическое их кинетических энергий:

$$E = \frac{E_1 + E_2 + \ldots + E_N}{N} = \frac{1}{N}\left(\frac{m_0 v_1^2}{2} + \frac{m_0 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_0 v_N^2}{2}\right) = \frac{m_0}{2}\,\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}.$$

Последний множитель — это *средний квадрат скорости*, обозначаемый просто $v^2$:

$$v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}.$$

Тогда формула для средней кинетической энергии приобретает привычный вид:

$$E = \frac{m_0 v^2}{2}. \tag{1}$$

Корень из среднего квадрата скорости называется *средней квадратической скоростью*:

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}}.$$

## Основное уравнение МКТ идеального газа

Связь между давлением газа и средней кинетической энергией его частиц называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа*. Эта связь выводится из законов механики и имеет вид:

$$p = \frac{2}{3} nE, \tag{2}$$

где $n$ — концентрация газа (число частиц в единице объёма). С учётом (1) имеем также:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n v^2. \tag{3}$$

Что такое $m_0 n$? Произведение массы частицы на число частиц в единице объёма даёт массу единицы объёма, то есть плотность: $m_0 n = \rho$. Получаем третью разновидность основного уравнения:

$$p = \frac{1}{3} \rho v^2. \tag{4}$$

## Энергия частиц и температура газа

Можно показать, что *при установлении теплового равновесия между двумя газами выравниваются средние кинетические энергии их частиц*. Но мы знаем, что при этом становятся равны и температуры газов. Следовательно, *температура газа — это мера средней кинетической энергии его частиц*.

Собственно, ничто не мешает попросту отождествить эти величины и сказать, что температура газа — это средняя кинетическая энергия его молекул. В продвинутых курсах теоретической физики так и поступают. Определённая таким образом температура измеряется в энергетических единицах — джоулях.

Но для практических задач удобнее иметь дело с привычными кельвинами. Связь средней кинетической энергии частиц и абсолютной температуры газа даётся формулой:

$$E = \frac{3}{2} kT, \tag{5}$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — *постоянная Больцмана*.

Из данной формулы можно получить выражение для средней квадратической скорости частиц. Подставим (1) в (5):

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

В эту формулу входит масса частицы $m_0$, которую ещё надо вычислить. Но можно получить более удобный вариант формулы, домножив числитель и знаменатель подкоренного выражения на число Авогадро $N_{\text{А}}$:

$$v = \sqrt{\frac{3kN_{\text{А}}T}{m_0 N_{\text{А}}}}.$$

В знаменателе имеем: $m_0 N_{\text{А}} = \mu$ — молярная масса газа. В числителе стоит произведение двух констант, которое также является константой:

$$R = kN_{\text{А}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\, \text{моль}^{-1} = 8{,}31\, \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Константа $R$ называется *универсальной газовой постоянной*.

Теперь формула для средней квадратической скорости приобретает вид:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\,.$$

Такое выражение гораздо более удобно для практических вычислений.

## Уравнение Менделеева — Клапейрона

Берём формулу $p = \frac{2}{3}nE$ и подставляем в неё $E = \frac{3}{2}kT$. Получаем:

$$p = nkT.$$

Вспомним теперь, что $n = \frac{N}{V}$ и $N = \nu N_{\text{A}}$, где $\nu$ — число молей газа:

$$p = \frac{N}{V}kT = \frac{\nu N_{\text{A}}}{V}kT = \frac{\nu RT}{V}\,,$$

откуда

$$pV = \nu RT. \tag{6}$$

Соотношение (6) называется *уравнением Менделеева — Клапейрона*. Оно даёт взаимосвязь трёх важнейших макроскопических параметров, описывающих состояние идеального газа — давления, объёма и температуры. Поэтому уравнение Менделеева — Клапейрона называется ещё *уравнением состояния идеального газа*.

Учитывая, что $\nu = \frac{m}{\mu}$, где $m$ — масса газа, получим другую форму уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT. \tag{7}$$

Есть ещё один полезный вариант этого уравнения. Поделим обе части на $V$:

$$p = \frac{m}{V\mu}RT.$$

Но $\frac{m}{V} = \rho$ — плотность газа. Отсюда

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT. \tag{8}$$

В задачах по физике активно используются все три формы записи (6)—(8).