Гравитация

[Овчинкин] → 4.42, 4.43.

Задача 1. (*МФТИ, 1987*) С какой скоростью должен был бы лететь самолёт вдоль экватора, чтобы сила давления сидящих пассажиров на кресла самолёта уменьшилась на четверть по сравнению силой давления перед взлётом? Радиус Земли принять равным $R = 6400$ км. Собственным вращением Земли и высотой полёта по сравнению с радиусом Земли пренебречь.

$v = \frac{1}{2}\sqrt{gR} \approx 4$ км/с

Задача 2. (*«Физтех», 2016, 9*) На какой высоте, считая от поверхности Земли, ускорение свободного падения на 19% меньше, чем на поверхности Земли? Радиус Земли равен R.

$h = R/9$

Задача 3. (*«Физтех», 2016, 9*) Радиус планеты равен R. На какой высоте, считая от поверхности планеты, скорость спутника, движущегося по круговой орбите, будет в 2 раза меньше первой космической скорости для этой планеты?

$h = 3R$

Задача 4. (*«Физтех», 2019, 9*) Некоторые планеты (Венера, Земля, Нептун) движутся вокруг Солнца по орбитам, «близким» к круговым. Радиус орбиты Нептуна в $n = 30$ раз больше радиуса земной орбиты. Планеты движутся по орбитам в одной плоскости и в одном и том же направлении.

1. Вычислите продолжительность $T_{\text{Н}}$ года на Нептуне. Продолжительность земного года $T_{\text{З}} = 365$ суток.

2. Через какой наименьший промежуток времени τ расстояние между Землей и Нептуном достигает наибольшего значения?

1) $T_{\text{Н}} = T_{\text{З}}\sqrt{n^3} \approx 164$ года; 2) $\tau = \frac{T_{\text{Н}}T_{\text{З}}}{T_{\text{Н}} - T_{\text{З}}} = 367$ суток

Задача 5. (*МОШ, 2007, 9*) Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Марса. Ответ выразите в земных годах. Расстояние от Марса до Солнца в $n = 1{,}53$ раза превосходит расстояние от Земли до Солнца. Считайте, что орбиты Земли и Марса являются круговыми.

Через 2,12 земных лет

Задача 6. (*«Физтех», 2021, 9*) Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора в том же направлении, что и точки на экваторе. Радиус орбиты спутника в два раза больше радиуса Земли $R = 6400$ км. Ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите период T обращения спутника.

В некоторый момент времени расстояние от наблюдателя на экваторе до спутника наименьшее.

2. Через какое время T_1 расстояние между наблюдателем и спутником впервые будет расти с наибольшей скоростью?

3. Найдите эту скорость V.

1) $T = 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \approx 14\cdot 10^3$ с; 2) $\tau = \frac{T_E T}{6(T_E - T)} \approx 2{,}8\cdot 10^3$ с; 3) $V = 2\pi R\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_E}\right) \approx 2{,}4\cdot 10^3$ м/с; здесь $T_E = 8{,}64\cdot 10^4$ с

Задача 7. (*МОШ, 2009, 9*) Оцените, на какой широте наблюдатель не сможет видеть ни одного спутника Земли, находящегося на геостационарной орбите, то есть как бы «висящего» над одной точкой земной поверхности. Радиус Земли равен R, ускорение свободного падения на поверхности Земли — g, период обращения (сутки) — T.

$\varphi > \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{4\pi^2 R}{gT^2}}\right)$

Задача 8. (*«Курчатов», 2016, 10*) Астроном-любитель Вася следит за движением двух искусственных спутников Земли, летающих на одной и той же высоте $h = 300$ км над экватором по круговым орбитам. Спутники пролетают точно над наблюдателем. Вася измеряет периоды движения этих спутников (промежутки времени между последовательными «пролётами» над ним). Оказалось, что эти периоды заметно отличаются. Какова разница этих периодов?

Модуль ускорения свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2, радиус Земли равен $R_0 = 6{,}4\cdot 10^6$ м.

$\Delta T = \frac{4\pi\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \approx 12$ мин

Задача 9. (*Всеросс., 2005, финал, 10*) «Двойная звезда» состоит из двух звёзд, находящихся на постоянном расстоянии друг от друга. Космонавт Глюк решил вывести космический корабль на орбиту таким образом, чтобы он находился всё время на отрезке, соединяющем звёзды, на постоянном расстоянии от каждой из звёзд и расходовал при этом минимальное количество топлива. Проведя все расчёты, Глюк нашёл, что корабль должен находиться на расстоянии l_1 от первой звезды и l_2 от второй, и успешно вывел корабль на орбиту. Чему равно отношение M_1/M_2 масс звёзд?

$\frac{M_1}{M_2} = \frac{(l_1+l_2)^3 - l_2^3}{(l_1+l_2)^3 - l_1^3}\,\frac{l_1^2}{l_2^2}$

Задача 10. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 10*) Плотность вещества некоторой планеты, имеющей форму шара радиуса $R = 6400$ км, зависит только от расстояния до центра планеты. При бурении скважины глубиной несколько десятков километров обнаружилось, что ускорение свободного падения не зависит от глубины погружения под поверхность планеты. Найдите плотность вещества, из которого состоит поверхность планеты, если средняя плотность планеты, равная отношению её массы к объёму, равна $\rho = 5{,}5$ г/см^3.

$\boxed{\rho_x = \frac{2}{3}\rho \approx 3{,}7 \text{ г/см}^3}$

Задача 11. Считая планету однородным шаром с плотностью ρ, найдите минимальный период обращения её спутника.

$\boxed{T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}$

Задача 12. (*Всеросс., 2002, финал, 9*) Космический зонд «Шумейкер» на некоторое время должен стать спутником астероида Эрос. По расчётам он будет обращаться вокруг астероида на высоте, составляющей $n = 1/15$ радиуса Эроса, с периодом $T = 4{,}5$ часа. Определите предполагаемую среднюю плотность астероида ρ. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

$\boxed{\rho = \frac{3\pi(n+1)^3}{GT^2} \approx 653 \text{ кг/м}^3}$

Задача 13. (*«Росатом», 2011, 11*) Спутник массой m движется вокруг планеты массой M по круговой орбите радиуса R со скоростью, вдвое превышающей первую космическую скорость для данной орбиты. Чему равна и куда направлена сила тяги, которую развивает двигатель спутника?

$\boxed{F = 3G\frac{Mm}{R^2}, \text{ к центру планеты}}$

Задача 14. (*Всеросс., 1992, ОЭ, 11*) Предполагая, что некий фантастический космический корабль может выдержать любые тепловые и механические перегрузки, найдите минимально возможный период обращения такого корабля вокруг Солнца (и обоснуйте, почему такой период минимален), зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца равен $\alpha = 9{,}3 \cdot 10^{-3}$ рад.

$\boxed{T_{\min} = T_{\text{Земли}} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3/2} = 0{,}166 \text{ сут}}$

Задача 15. Банан перевезли с экватора на полюс. Оцените относительное изменение $\Delta P/P$ веса банана за счёт суточного вращения Земли.

$\boxed{3 \cdot 10^{-3}}$

Задача 16. (*МФТИ, 1979*) При какой продолжительности суток тела на экваторе Земли весили бы в два раза меньше, чем на полюсе? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \approx 2 \text{ часа}}$

Задача 17. (*МФТИ, 1987*) При какой продолжительности суток на Земле тела на экваторе были бы невесомы? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84 \text{ мин}}$

Задача 18. (*МОШ, 2006, 7*) Найдите примерную величину давления в центре Земли, считая, что средняя плотность вещества земного шара равна $\rho = 5000$ кг/м^3. Радиус Земли $R_З = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2.

$p = \rho g R_З/2 \approx 1{,}6 \cdot 10^{11}$ Па; это примерно 1,6 миллиона атмосфер

Задача 19. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 11*) Ускорение свободного падения на поверхности планеты из несжимаемой жидкости равно $a = 9{,}8$ м/с^2. Найдите давление в центре планеты.

$p = \frac{3a^2}{8\pi G} \approx 1{,}7 \cdot 10^{11}$ Па

Задача 20. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 9*) Земля из-за вращения вокруг своей оси сплющена со стороны полюсов. Поэтому расстояние от центра Земли до полюсов (полярный радиус) меньше расстояния от центра Земли до экватора (экваториальный радиус). Оцените отношение разности экваториального и полярного радиусов к среднему радиусу Земли $R = 6370$ км. Землю считать жидким телом, окружённым тонкой эластичной оболочкой в виде земной коры.

$\frac{\Delta R}{R} = \frac{2\pi^2 R}{gT^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}$

В далеком созвездии Тау Кита...
Живут, между прочим, по-разному
Товарищи наши по разуму...

В. Высоцкий

Задача 21. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 9*) Планета Косатка из созвездия Тау Кита имеет тот же размер, что и Земля, и состоит из несжимаемой жидкой субстанции, плотность которой $\rho = 800$ кг/м^3. Продолжительность суток на этой планете составляет 10 ч. Северный полюс Косатки направлен на Землю. Однажды ночью обитатель планеты Кит Вэйл всплыл на поверхность планеты в северном полушарии на широте $\alpha = 56°$, чтобы полюбоваться звёздным небом. Найдите угол между горизонтом в точке, где всплыл Вэйл, и направлением на Землю (её средняя плотность $\rho_0 = 5500$ кг/м^3, радиус $R = 6400$ км). Во всем созвездии Тау Кита *широтой точки* называется угол между радиусом, проведённым к ней из центра планеты, и плоскостью экватора.

$\operatorname{ctg}\beta = \left(1 - \frac{4\pi^2\rho_0 R}{\rho g T^2}\right)\operatorname{ctg}\alpha$; $\beta \approx 60°$

Задача 22. (*МФТИ, 1993*) Тело, брошенное с поверхности Земли вертикально вверх с некоторой скоростью, упало на Землю через 3 с. Через какое время упадёт тело, брошенное вертикально вверх с той же скоростью на Луне? Радиус Земли в 3,8 раза больше радиуса Луны, а масса Земли в 81 раз больше массы Луны.

$t_Л = \frac{M_З R_Л^2}{M_Л R_З^2} t_З = 16{,}8$ с

Задача 23. (*МФТИ, 1993*) Во сколько раз отличаются минимальные периоды обращения спутников для Марса и Земли? Масса Марса составляет $\alpha = 0{,}11$ массы Земли, а радиус Марса — $\beta = 0{,}53$ радиуса Земли.

$\frac{T_М}{T_З} = \beta\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \approx 1{,}16$

Задача 24. (*МФТИ, 1995*) Луна движется вокруг Земли с периодом $T = 27{,}3$ суток по орбите, которую можно считать круговой. Радиус Земли $r = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2. Определить по этим данным расстояние между Землёй и Луной.

$$L = \sqrt[3]{\frac{gr^2T^2}{4\pi^2}} \approx 3{,}8 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Задача 25. (*МФТИ, 1995*) Спутник Фобос обращается вокруг Марса по орбите радиуса $R = 9400$ км с периодом $T = 7$ ч 39 мин. Радиус Марса $R_0 = 3400$ км. Найти по этим данным ускорение свободного падения на поверхности Марса.

$$g = \frac{R^3}{R_0^2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx 3{,}7 \text{ м/с}^2$$

Задача 26. (*МФТИ, 1993*) При какой продолжительности суток на Земле камень, лежащий на широте $\varphi = 60^\circ$, оторвётся от поверхности Земли? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$$T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \cos\varphi \approx 42 \text{ мин}$$

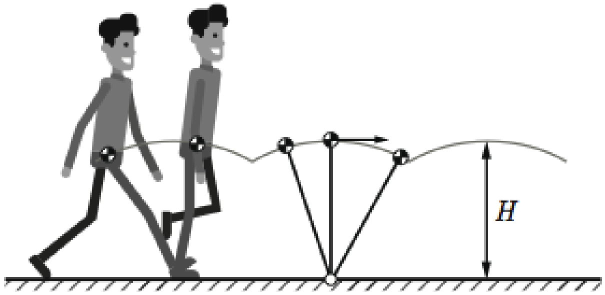
Задача 27. (*МФТИ, 1993*) Груз висит на нити в Москве. При какой продолжительности суток Земли нить расположилась бы параллельно оси вращения Земли? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84 \text{ мин}$$

Задача 28. (*МОШ, 2006, 10*) Два космических корабля с массами m_1 и m_2 летят с выключенными двигателями в поле тяготения звезды, масса которой M много больше их масс. Скорости кораблей на большом удалении от звезды были равны v_1 и v_2 соответственно. После пролёта кораблей около звезды и их удаления на большое расстояние от неё векторы их скоростей изменили своё направление на 90° и остались такими же по величине. Первый корабль пролетел от звезды на минимальном расстоянии l_1. На каком минимальном расстоянии от звезды l_2 пролетел второй корабль?

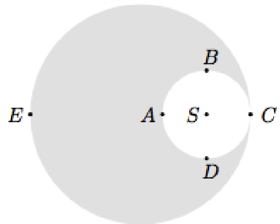
$$l_2 = l_1\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

Задача 29. (*МОШ, 2019, 10*) В простейшей физической модели пешей ходьбы считается, что центр масс человека движется по периодической кривой, повторяющийся участок которой представляет собой дугу окружности с радиусом, равным длине ноги человека H. Определите в рамках этой модели отношение максимальных скоростей ходьбы на Земле и на Марсе, а также отношение мощностей, затрачиваемых при ходьбе с максимально возможной скоростью на этих планетах. Масса Марса составляет 0,11 массы Земли, радиус Марса равен 0,53 радиуса Земли. По поверхности Марса человек перемещается в скафандре, масса которого составляет примерно треть массы человека. Траектории центра масс человека на Земле и человека в скафандре на Марсе считайте одинаковыми. Учтите, что при ходьбе необходим постоянный контакт хотя бы одной ноги с поверхностью планеты.



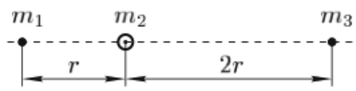
1) $\frac{u_{З.max}}{u_{М.max}} = \sqrt{\frac{g_З}{g_М}} \approx 2{,}6$; 2) $\frac{P_{З.max}}{P_{М.max}} = \frac{3}{4}\left(\frac{g_З}{g_М}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 3{,}1$

Задача 30. (*МОШ, 2015, 11*) Космонавты, высадившиеся на астероид радиусом $R = 5$ км, обнаружили внутри астероида сферическую полость радиусом $r = 2$ км. Оказалось, что в центре S полости ускорение свободного падения составляет $g_S = 0{,}2$ см/с^2. Определите плотность астероида, считая её постоянной. Изобразите на рисунке векторы ускорения свободного падения в точках A, B, C, D, E. Определите модули ускорения свободного падения в этих точках. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.



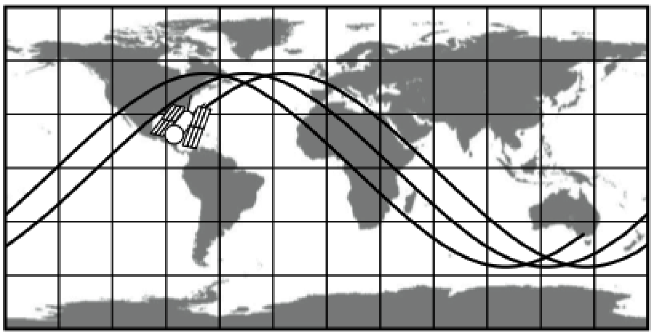
$\rho = \frac{3g_S}{4\pi G(R-r)} \approx 2400$ кг/м^3; $\vec{g}_A = \vec{g}_B = \vec{g}_C = \vec{g}_D = \vec{g}_S$; $g_E = g_S \frac{1}{R-r}\left(R - \frac{r^3}{(R-r)^2}\right) = 0{,}32$ см/с^2, к центру планеты

Задача 31. (*Всеросс., 2009, финал, 10*) В открытом космосе три небольших астероида из-за гравитационного притяжения сближаются друг с другом вдоль общей прямой, неподвижной относительно звёзд. Отношение расстояний от среднего астероида до крайних остаётся равным $n = 2$ вплоть до их столкновения (рис.). Масса левого астероида равна m_1, масса центрального — m_2. Найдите массу m_3 правого астероида.



$m_3 = \frac{104m_1+63m_2}{19}$

Задача 32. (*Всеросс., 2009, РЭ, 11*) На большом экране в центре управления полётами отображается траектория Международной космической станции (МКС) — след от пересечения поверхности Земли прямой, проведённой из центра Земли к станции (рис.). Станция движется по круговой орбите.



Оцените с помощью данного рисунка высоту h космической станции над поверхностью Земли. Считайте, что радиус Земли равен $R = 6380$ км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}81$ м/с^2.

$\boxed{280 \text{ км}}$

Задача 33. (*Межреспубл., 1992, финал, 11*) Масса Харона, недавно открытого спутника Плутона, в 8 раз меньше массы планеты. Плутон и Харон обращаются по круговым орбитам вокруг общего центра масс, причём они все время «смотрят друг на друга», т. е. система вращается как единое твёрдое тело. Расстояние между центрами планеты и её спутника $R = 19640$ км, радиус Харона $r = 563$ км. Определите относительное различие в ускорениях свободного падения на Хароне в точке, наиболее близкой к Плутону, и в точке, наиболее удалённой от него.

$\boxed{\frac{\Delta g}{g} = \frac{6M}{m}\left(\frac{r}{R}\right)^4 = 4 \cdot 10^{-5}}$

Задача 34. (*Всеросс., 2016, РЭ, 11*) Скопления звёзд образуют бесстолкновительные системы — галактики, в которых звёзды равномерно движутся по круговым орбитам вокруг оси симметрии системы. Галактика NGC 2885 состоит из скопления звёзд в виде шара (ядра радиусом $r_я = 4$ кпк) и тонкого кольца, внутренний радиус которого совпадает с радиусом ядра, а внешний равен $15r_я$. Кольцо состоит из звёзд с пренебрежимо малой по сравнению с ядром массой. В ядре звёзды распределены равномерно.

Было установлено, что линейная скорость движения звёзд в кольце не зависит от расстояния до центра галактики: от внешнего края кольца вплоть до края ядра скорость звёзд $v_0 = 240$ км/с. Такое явление может быть объяснено наличием несветящейся массы («тёмной материи»), распределённой сферически симметрично относительно центра галактики вне её ядра.

1) Определите массу $M_я$ ядра галактики.

2) Определите среднюю плотность $\rho_я$ вещества ядра галактики.

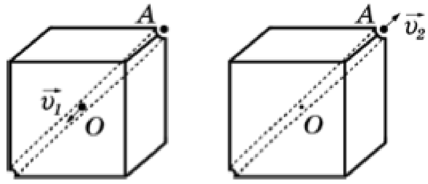
3) Найдите зависимость плотности «тёмной материи» $\rho_т(r)$ от расстояния до центра галактики.

4) Вычислите отношение массы «тёмной материи», влияющей на движение звёзд в диске, к массе ядра.

Примечание: 1 кпк $=$ 1 килопарсек $= 3{,}086 \cdot 10^{19}$ м, гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2 $\cdot$ кг$^{-2}$.

1) $M_я = \frac{r_я v_0^2}{\gamma} = 1{,}1 \cdot 10^{41}$ кг; 2) $\rho_я = \frac{3v_0^2}{4\pi\gamma r_я^2} = 1{,}35 \cdot 10^{-20}$ кг/м^3; 3) $\rho_т(r) = \frac{v_0^2}{4\pi\gamma r^2}$; 4) $M_т/M_я = 14$

Задача 35. (*Всеросс., 2019, РЭ, 11*) На планете в форме куба из однородного материала вдоль большой диагонали высверлили узкий прямой гладкий канал. Если маленький шарик отпустить без начальной скорости из точки A (вершина куба), его скорость в момент прохождения центра куба (точка O) будет равна v_1. Какую минимальную скорость v_2 нужно сообщить шарику при запуске в космос из точки A, чтобы он мог покинуть поле тяготения планеты? Атмосферы у планеты нет.



$v_2 = v_1$

Задача 36. (*IPhO, 2017*)

- Тёмная материя / Dark Matter.
- Solution.

Задачи 37 и 38 следует решать именно в указанном порядке, поскольку задача IPhO-2017 служит логическим продолжением задачи APhO-2016[1].

Задача 37. (*APhO, 2016*)

- Расширяющаяся Вселенная / The Expanding Universe.
- Solution.

Задача 38. (*IPhO, 2017*)

- Расширение Вселенной / Cosmic Inflation.
- Solution.

[1]Разобравшись в задаче 37 и приступив к задаче 38, вы немедленно оцените нестандартный замысел организаторов IPhO: если не знать задачу APhO годичной давности, то существенно продвинуться в задаче IPhO шансов было мало.