Функции нескольких переменных

«Всё зависит только от тебя» — так говорят люди, не знакомые с понятием функции многих переменных.

Неизвестный автор

Данный листок возник в результате обсуждения задачи «Проводники в проводящей жидкости», предложенной на APhO-2013. Наряду с авторским способом вычисления магнитного поля (через теорему о циркуляции с предварительным интегрированием плотности тока по вспомогательной поверхности) есть и другой: проинтегрировать по координатам ротор вектора индукции магнитного поля (который пропорционален этой самой плотности тока). Первый способ апеллирует к *интегральной* форме законов электродинамики, второй — к *дифференциальной*.

При втором способе, однако, требуется донести до школьника, что такое ротор векторного поля и почему интегральная форма теоремы о циркуляции (в магнитостатике) равносильна утверждению $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$. Для этого нужно вообще поговорить о функциях нескольких переменных и частных производных, ну и заодно, пользуясь случаем, — о градиенте и дивергенции. Всё это позволит хотя бы немного сократить дистанцию между школьной физикой и основными законами электродинамики, которые выражаются уравнениями Максвелла.

Содержание

В математике и физике часто приходится иметь дело с величинами, которые зависят от *нескольких* других величин. Например, сила, действующая на материальную точку, может зависеть от трёх её пространственных координат и времени; давление газа есть функция его температуры и объёма и т. д.

1 Линии и поверхности уровня

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ является поверхность в трёхмерном пространстве.

1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$. Соответствующая поверхность — параболоид вращения. Нарисуйте его. Изобразите сечения этой поверхности плоскостями $z = a$ при разных значениях a и проекции этих сечений на плоскость xy.

Проекции на плоскость xy сечений поверхности $z = f(x, y)$ различными плоскостями $z = a$ называются *линиями уровня* функции $f(x, y)$. Иными словами, линия уровня — это множество всех точек плоскости xy, в которых функция принимает данное значение a; можно сказать ещё, что линия уровня есть «график уравнения» $f(x, y) = a$ (таким образом, решение системы уравнений $f(x, y) = a$ и $g(x, y) = b$ в наших новых терминах означает нахождение координат точек пересечения соответствующих линий уровня функций f и g).

Семейство линий уровня даёт наглядное представление о том, как устроена поверхность. Например, рельеф земной поверхности на топографической карте изображается с помощью линий фиксированной высоты над уровнем моря.

2. Нарисуйте (схематически) семейство линий уровня следующих функций:
а) $z = 2x^2 + 3y^2$ (поверхность — эллиптический параболоид);
б) $z = x^2 - y^2$ (поверхность — гиперболический параболоид).

Точно так же функция трёх переменных $f(x, y, z)$ может быть наглядно представлена семейством *поверхностей уровня* $f(x, y, z) = a$.

3. Каковы поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$?

Физический пример поверхностей уровня вам хорошо известен. Именно, если $\varphi(x, y, z)$ — потенциал электрического поля, то множество точек пространства, координаты которых являются решением уравнения $\varphi(x, y, z) = a$, есть соответствующая *эквипотенциальная поверхность*.

2 Частные производные

Вернёмся к функции двух переменных $f(x, y)$. Часто бывает важно знать, с какой скоростью меняются значения функции, когда мы перемещаемся по плоскости xy.

4. С какой скоростью меняются значения функции, когда мы идём по линии уровня?

Пусть мы перешли из точки (x, y) в точку $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. *Приращением* функции называется величина

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

а *частными приращениями* — величины

$$\Delta_x f = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta_y f = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Скорость изменения функции вдоль координатных осей x и y даётся соответствующими *частными производными*:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\,.$$

Здесь и далее мы считаем нашу функцию достаточно «хорошей» (непрерывной и гладкой), так что все нужные нам производные существуют.

При вычислении частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ мы воспринимаем переменную y как константу. Аналогично, вычисляя $\frac{\partial f}{\partial y}$, мы считаем x константой. Например, если $f(x, y) = x^2 \sin y$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

5. (*Геометрический смысл частной производной*) Напомним, что обычная производная функции (одной переменной) есть угловой коэффициент касательной, проведённой к нрафику функции в данной точке. Сформулируйте аналогичное утверждение для частной производной.

Можно вычислять частные производные более высоких порядков. Например, производных второго порядка формально четыре штуки:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Однако на самом деле их три, поскольку оказывается, что смешанные вторые производные равны друг другу:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(есть в матанализе такая теорема).

6. Убедитесь в этом на примере функций $f(x, y) = x^2 \sin y$ и $f(x, y) = x^y$.

7. Записав

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ = \big(f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\big) + \big(f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\big)$$

и перейдя к малым приращениям (dx, dy и df), убедитесь, что

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Данное равенство без труда переносится и на случай трёх переменных: для малого приращения функции $f(x, y, z)$ имеем

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

3 Частные производные в термодинамике

Рассмотрим пример применения частных производных в термодинамике (в которой они встречаются на каждом шагу). Как вы знаете, для идеального газа величины p, V и T (давление, объём и температура) не могут меняться произвольно — они связаны *уравнением состояния* $pV = \nu RT$. Опыт показывает, что и для многих других тел эти величины связаны некоторым уравнением состояния $f(p, V, T) = 0$, где вид функции f зависит от тела.

Уравнение состояния можно разрешить относительно, например, переменной p:

$$p = p(V, T),$$

откуда

$$dp = \frac{\partial p}{\partial V} dV + \frac{\partial p}{\partial T} dT.$$

В термодинамике принято несколько отягощать такую запись:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT,$$

подчёркивая, например, обозначением $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$, что давление дифференцируется по объёму при неизменной температуре.

8. Применив последнюю формулу к изобарному процессу, докажите тождество

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1.$$

Объясните, почему в левой части этого тождества нельзя сократить дифференциалы и получить $+1$.

9. При изобарном нагревании тело расширяется, причём отношение приращения объёма к объёму V_0 при $0\,^\circ\mathrm{C}$ пропорционально приращению температуры. Коэффициент пропорциональности α называется *коэффициентом объёмного расширения*. Убедитесь, что

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

10. При изохорном нагревании давление тела увеличивается, причём отношение приращения давления к давлению p_0 при $0\,^\circ\mathrm{C}$ пропорционально приращению температуры. Коэффициент пропорциональности β называется *температурным коэффициентом давления*. Убедитесь, что

$$\beta = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

11. При изотермическом сжатии давление тела увеличивается, причём приращение давления пропорционально относительному изменению объёма:

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} .$$

Величина K называется *модулем всестороннего сжатия*. Убедитесь, что

$$K = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T .$$

12. Пользуясь результатом задачи 8, покажите, что коэффициент объёмного расширения, температурный коэффициент давления и модуль всестороннего сжатия тела связаны соотношением

$$\frac{\alpha K}{\beta} = \frac{p_0 V}{V_0} .$$

Это равенство подтверждается экспериментально! Значит, уравнение состояния действительно существует.

13. Вычислите величины α, β, K для идеального газа. Убедитесь, что они удовлетворяют равенству, полученному в предыдущей задаче.

4 Градиент

Градиентом функции $f(x,y)$ называется вектор $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, то есть

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j}.$$

Производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ вычисляются в каждой точке (x, y); градиент, таким образом, задан в каждой точке и, вообще говоря, меняется от точки к точке.

Чем интересен градиент? Заметим, что правую часть равенства $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ можно интерпретировать как скалярное произведение градиента на малое перемещение $d\vec{r} = (dx, dy)$:

$$df = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r}.$$

14. Выведите отсюда, что градиент в данной точке перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку.

15. Найдите градиент функции $z = y - x^2$ в точке $(1, 1)$. Сделайте рисунок и убедитесь, что градиент перпендикулярен соответствующей линии уровня.

Градиент направлен в сторону наибыстрейшего возрастания функции f. Это можно строго доказать (с помощью понятия производной по направлению), но мы не будем этого делать и примем данное утверждение как интуитивно понятное (раз уж градиент направлен перпендикулярно линиям уровня, то ясно, что в сторону наискорейшего подъёма).

16. Найдите функцию $f(x, y)$, для которой

$$\operatorname{grad} f = \left(6x^2y + 10xy^2\right)\vec{i} + \left(2x^3 + 10x^2y\right)\vec{j},$$

и $f(0, 0) = 0$.

17. Может ли градиент некоторой функции иметь компоненты (x^2, xy)?

Сказанное легко переносится на случай трёх переменных. Именно, градиентом функции $f(x, y, z)$ является вектор

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через данную точку, и направлен в сторону наискорейшего возрастания функции f.

5 Потенциальное векторное поле

Предположим, что в каждой точке некоторой области (на плоскости или в пространстве) задан некоторый вектор; тогда говорят, что в данной области имеется *векторное поле*. Примером может служить электрическое поле — в каждой точке задан вектор напряжённости $\vec{E}$.

Пусть имеется силовое поле $\vec{F}(x, y, z)$, то есть в каждой точке с координатами (x, y, z) на тело действует некоторая сила $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Возникает вопрос: найдётся ли такая скалярная функция $U(x, y, z)$, что вектор силы везде равен градиенту этой функции? Задача 17 показывает, что в общем случае такую функцию мы не подберём. Но предположим, что это всё же случилось:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

(скоро прояснится, зачем тут поставлен минус), то есть

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

Тогда при малом перемещении $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ поле совершит работу

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz = -dU,$$

а при произвольном перемещении из точки 1 в точку 2 работа поля равна

$$A = \int\limits_1^2 dA = -\int\limits_1^2 dU = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2 = -\Delta U.$$

Работа, как видим, не зависит от пути, ведущего из точки 1 в точку 2. Такое силовое поле называется *потенциальным*, а функция U — *потенциальной энергией*. Работа потенциального поля равна разности потенциальной энергии в начальной и конечной точках. Потенциальными, как вы знаете, являются гравитационное и электростатическое поля.

18. Убедитесь, что для напряжённости электростатического поля справедливо равенство

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

где φ — потенциал поля. Таким образом, вектор $\vec{E}$ в любой точке направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности в сторону наискорейшего убывания потенциала.

6 Набла, или дифференциальный оператор Гамильтона

Набла — это символ

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Набла является *оператором* — он «дожидается с разинутым ртом», когда ему «дадут» функцию f. И если «дали», то

$$\nabla f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{grad} f.$$

Набла выглядит как вектор, и поэтому можно взять скалярное произведение наблы и векторного поля $\vec{E}$. Получится скалярная функция, которая называется *дивергенцией* поля $\vec{E}$ и обозначается также $\operatorname{div} \vec{E}$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,.$$

Можно рассмотреть и векторное произведение наблы с векторным полем. Об этом — ниже.

7 Циркуляция и ротор

Снова рассмотрим векторное поле $\vec{E}(x, y, z)$. *Циркуляцией* вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру Γ называется интеграл

$$\oint\limits_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint\limits_\Gamma E_l\, dl$$

(то есть интегрируется касательная составляющая вектора).

19. Как в школьной физике называется циркуляция вихревого электрического поля?

20. Объясните из физических соображений, почему *циркуляция градиента по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Теперь, как и было обещано выше, берём векторное произведение наблы и векторного поля $\vec{E}$. Получится вектор, который называется *ротором* векторного поля $\vec{E}$ и обозначается $\operatorname{rot}\vec{E}$:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E}.$$

21. Запишите выражение для ротора в координатах.

22. Непосредственным вычислением убедитесь, что *дивергенция ротора равна нулю.*

23. Непосредственным вычислением убедитесь, что *ротор градиента равен нулю.*

24. Диск с центром в начале координат расположен в плоскости xy и вращается вокруг центра с угловой скоростью $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Векторное поле скоростей точек диска, как мы знаем, даётся формулой $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

1) Найдите функции $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$, $v_z(x, y)$.

2) Покажите, что $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}$.

3) Покажите, что циркуляция вектора $\vec{v}$ по окружности радиуса r равна потоку ротора вектора $\vec{v}$ через круг, ограниченный данной окружностью.

Вообще, *если замкнутый контур* Γ *служит границей поверхности* S, *то циркуляция вектора* $\vec{E}$ *по контуру* Γ *равна потоку ротора этого вектора через поверхность* S:

$$\oint\limits_{\Gamma} E_l\,dl = \int\limits_S (\operatorname{rot}\vec{E})_n\,dS$$

(индексом n обозначена нормальная к поверхности составляющая вектора). Это — знаменитая *теорема Стокса.* Доказывать её во всей общности вы будете на втором курсе, ну а последний пункт последней задачи послужил иллюстрацией этой теоремы для простого частного случая.

25. Посмотрите, как через теорему Стокса связаны друг с другом утверждения задач 20 и 23.

Вспомним теорему о циркуляции магнитного поля:

$$\oint\limits_{\Gamma} B_l\,dl = \mu_0 I,$$

где I — ток через поверхность S, границей которой служит контур Γ. По теореме Стокса имеем

$$\oint\limits_{\Gamma} B_l\,dl = \int\limits_S (\operatorname{rot}\vec{B})_n\,dS = \int\limits_S \operatorname{rot}\vec{B}\cdot\vec{n}\,dS,$$

а по определению вектора плотности тока $\vec{j}$:

$$I = \int\limits_S j_n\,dS = \int\limits_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,dS$$

(вектор $\vec{n}$ — нормаль к поверхности). Теорема о циркуляции тогда переписывается в виде

$$\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \mu_0 \int\limits_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,dS.$$

Но поверхность S, натянутую на контур Γ, можно выбрать как угодно. Ввиду произвольности S получаем

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}.$$

Это — *теорема о циркуляции в дифференциальной форме*, которая служит удобным инструментом вычисления магнитного поля (например, в случае тока, распределённого по поверхности или объёму, когда как раз-таки и приходится работать с плотностью тока).