

## Энергия электрического поля

ЗАДАЧА 1. Пластины плоского конденсатора, имеющие заряды  $\pm q$  и почти соприкасающиеся, раздвигают на некоторое расстояние (много меньше размеров пластин).

1) Покажите, что минимальная работа, которую необходимо для этого совершить, равна

$$A = \frac{q^2}{2C},$$

где  $C$  — ёмкость получившегося конденсатора.

2) Покажите, что  $A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$ , где  $E$  — напряжённость поля в конденсаторе,  $V$  — объём конденсатора.

3) Совершённая внешними силами работа  $A$  равна увеличению некоторой энергии. Какой именно энергии?

ЗАДАЧА 2. (Всеросс., 2015, МЭ, 11) В грозовом облаке высотой  $h = 1$  км и площадью  $S = 100$  км<sup>2</sup> во время грозы создалось электрическое поле напряжённостью  $E = 1$  МВ/м, которое можно считать однородным.

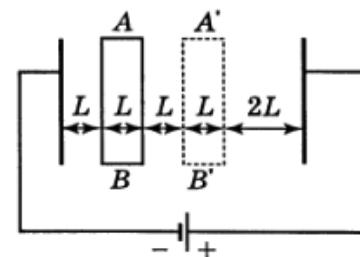
1) Оцените, какой электрический заряд накопился на верхней и на нижней поверхностях облака и какая электрическая энергия запасена в таком облаке. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона  $k = 9 \cdot 10^9$  Н · м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>.

2) Оцените отношение электрической силы, действующей на верхнюю (или нижнюю) поверхность облака, к силе тяжести, действующей на всё облако. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, плотность воздуха  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>.

3) Между верхней и нижней поверхностями облака сверкнула молния, и за время  $\tau = 1$  мс израсходовалось 19% запасённой в облаке электрической энергии. Оцените среднюю силу электрического тока в таком грозовом разряде и его среднюю мощность.

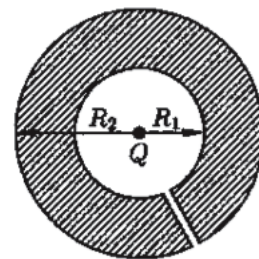
$$(1) \quad \frac{E^2}{2\varepsilon_0} S h \approx 4,4 \cdot 10^{11} \text{ Дж}; \quad (2) \quad \frac{q}{F} = \frac{8\pi k q^2}{E^2} \approx 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}; \quad (3) \quad I \approx 89000 \text{ А}, \quad P \approx 8,4 \cdot 10^{13} \text{ Вт}$$

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 1997, ОЭ, 10) Плоский конденсатор подсоединён к источнику постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$ . В конденсатор параллельно его обкладкам вносят заряженную проводящую пластину толщиной  $L$  и располагают её на расстоянии  $L$  и  $4L$  от каждой из обкладок конденсатора (рис.). Заряд пластины положителен и равен заряду  $Q$  конденсатора до внесения пластины. Форма и площадь пластины и обкладок конденсатора одинаковы, расстояние  $L$  много меньше размеров пластины. Какую работу необходимо совершить, чтобы переместить пластину из положения  $AB$  в положение  $A'B'$ ?



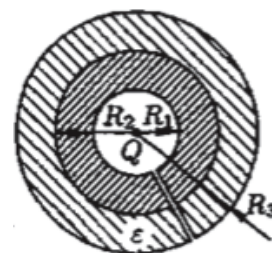
$$\mathcal{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = V$$

ЗАДАЧА 4. (Всеросс., 2005, ОЭ, 10) Маленький шарик с зарядом  $Q$  находится в центре закреплённого незаряженного полого шара (рис.) с радиусами концентрических поверхностей  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить шарик через узкий канал в проводнике на расстояние от полого шара, значительно большее  $R_2$ ?



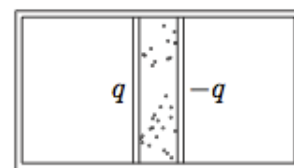
$$A = \frac{4\pi\epsilon_0 Q^2}{2(R_2 - R_1)} = V$$

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2005, ОЭ, 11) Маленький шарик с зарядом  $Q$  находится в центре закреплённого незаряженного проводящего полого шара с радиусами концентрических поверхностей  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Полый шар окружён снаружи концентрическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и радиусом наружной поверхности  $R_3$  (рис.). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить шарик через узкий канал в слоях проводника и диэлектрика на расстояние от полого шара, значительно большее  $R_3$ ?



$$A = \frac{4\pi\epsilon_0 Q^2}{2} \left( \frac{R_3}{R_2 - R_1} - \frac{1}{R_1} \right) = V$$

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2015, финал, 10) Два диска, по которым равномерно распределены заряды  $q$  и  $-q$ , могут двигаться без трения в длинном непроводящем теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально (см. рисунок). Расстояние между дисками много меньше их радиуса. Между дисками находится некоторое количество гелия, за дисками газа нет, система находится в равновесии. Заряды дисков мгновенно уменьшают вдвое, после чего ожидают прихода системы в равновесие. Пренебрегая теплообменом, найдите, во сколько раз изменится температура газа и расстояние между дисками.



$$z = \frac{1}{2}, z' = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ЗАДАЧА 7. (IPhO, 2000)<sup>1</sup> Заряд  $Q$  равномерно распределён в вакууме по объёму шара радиусом  $R$ .

а) Получите выражение для напряжённости электрического поля на расстоянии  $r$  от центра шара для  $r \leq R$  и  $r > R$ .

б) Получите выражение для полной электрической энергии, связанной с этим распределением заряда<sup>2</sup>.

$$E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & \text{если } r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{если } r > R; \end{cases} \quad W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

ЗАДАЧА 8. (МОШ, 2019, 11) В электродинамике при описании диэлектриков вводится в рассмотрение вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$ . Вектор  $\mathbf{D}$  количественно характеризует поле только (!) свободных зарядов, вектор  $\mathbf{E}$  — поле свободных зарядов и поляризационных зарядов, возникающих в диэлектриках. Обычно вектор  $\mathbf{D}$  пропорционален вектору  $\mathbf{E}$ . Однако, существуют материалы (сегнетоэлектрики) с нелинейной зависимостью  $\mathbf{D}$  от  $\mathbf{E}$ . В этой задаче

<sup>1</sup>Первое задание на IPhO-2000 состояло из пяти независимых задач, и это — одна из них.

<sup>2</sup>От себя замечу, что энергию можно посчитать двумя способами. Сможете ли вы найти их оба?

векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  сонаправлены. Схематично вид зависимости  $D(E)$  для типичного сегнетоэлектрика при постоянной температуре показан на левом рисунке чёрной линией. Зависимость  $D(E)$  для того же сегнетоэлектрика при более высокой температуре схематично показана серой линией. Обе зависимости обладают ярко выраженным гистерезисом, иначе говоря, значение  $D$  для данного  $E$  зависит от характера изменения поля  $E$  (увеличивается или уменьшается). Впрочем, в данной задаче это несущественно.

Вид зависимости  $D(E)$  в некоторых сегнетоэлектриках весьма сильно меняется с температурой, что позволяет их использовать для преобразования тепловой энергии в электрическую. Присоединим конденсатор с сегнетоэлектриком к идеальному источнику постоянного напряжения. Периодически изменяя температуру сегнетоэлектрика, можно получить периодически изменяющийся ток в цепи. При этом работа источника напряжения за цикл будет равна нулю. Получится преобразователь тепловой энергии в работу тока. Можно считать, что сегнетоэлектрик — это своеобразное рабочее тело тепловой машины, которое характеризуется параметрами:  $D$ ,  $E$ ,  $T$ .



Рассмотрим модельный цикл, показанный на правом рисунке. Процессы 1 – 2 и 3 – 4 — зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком при постоянной температуре. 2 – 3 и 4 – 1 — нагревание и охлаждение при постоянном электрическом поле. Цикл имеет форму параллелограмма.

Термодинамика сегнетоэлектрика описывается соотношениями, справедливыми для малых (!) изменений параметров  $\Delta E$ ,  $\Delta D$ ,  $\Delta T$ :

$$\Delta D = \varepsilon_0 \varepsilon \Delta E + p \Delta T, \quad \frac{\Delta Q}{V} = c \Delta T + p T \Delta E, \quad \frac{\Delta A}{V} = D \Delta E$$

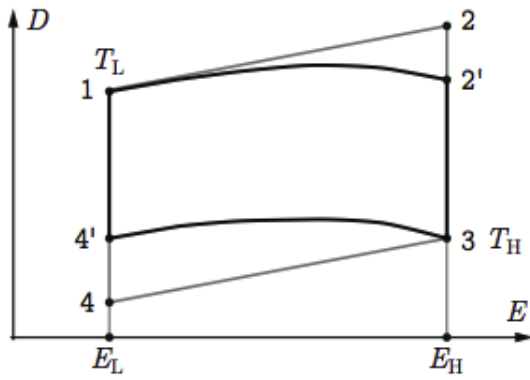
где  $\varepsilon$ ,  $p$  и  $c$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $p < 0$ ,  $c > 0$ ) — известные постоянные коэффициенты. Объём  $V$  считается постоянным.  $\Delta Q$  и  $\Delta A$  — количество теплоты и работа при малых изменениях параметров. Для решения задачи этих соотношений достаточно.

1. Определите КПД цикла 1234. Величины  $E_L$ ,  $E_H$  и  $T_L$ ,  $T_H$  считайте известными ( $T_L < T_H$ ). Если предположить, что  $E_L$  и  $E_H$  могут изменяться неограниченно, то чему равен максимальный КПД этого цикла?
2. Изобразите качественно на диаграмме  $D-E$  термодинамический цикл  $12'34'$ , в котором на участках 1 – 2' и 3 – 4' зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком происходят адиабатически. Температуры в точках 1 и 3 равны  $T_L$  и  $T_H$ .
3. Определите КПД цикла из п. 2), считая  $E_L$ ,  $E_H$  и  $T_L$ ,  $T_H$  известными, а изменения параметров  $D$ ,  $E$  и  $T$  в пределах цикла малыми. У какого цикла при одинаковых  $E_L$ ,  $E_H$ ,  $T_1 = T_L$  и  $T_3 = T_H$  больше КПД — у 1234 или у  $12'34'$ ?

Ответ к задаче 8

1)  $\eta_1 = \frac{-p(T_H - T_L)(E_H - E_L)}{c(T_H - T_L) - pT_H(E_H - E_L)}$ ;

2)



3)  $\eta_2 = \frac{r\Delta T}{\Delta T - rT_L}$ , где  $r = -\frac{p\Delta E}{c}$ ,  $\eta_2 > \eta_1$