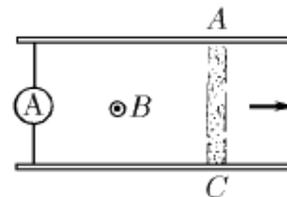


Двигатель постоянного тока

Основные принципы работы двигателя постоянного тока можно уяснить на примере простейшей (линейной) модели — переключки, скользящей по параллельным рельсам.

ЗАДАЧА 1. (Савченко, 11.1.14) а) Ускоритель плазмы (рельсотрон) состоит из двух параллельных массивных проводников (рельсов), лежащих в плоскости, перпендикулярной магнитному полю индукции B . Между точками A и C в водороде поджигают электрический разряд. Ток I в разряде поддерживается постоянным. Под действием магнитного поля область разряда (плазменный сгусток) перемещается, разгоняясь к концам рельсов и срываясь с них. Чему равна скорость плазменного сгустка, если его масса m ? Расстояние между рельсами l . Длина участка, на котором происходит ускорение плазмы, равна L .



б) Решите задачу для случая $B = 1$ Тл, $l = 0,1$ м, $L = 1$ м, $I = 10$ А; в плазменном сгустке содержится 10^{13} ионов водорода.

$$v/m = l_0 I \cdot l \cdot t \approx a \left(g : \frac{m}{\pi l B^2} \right)^{1/2} = a \text{ (в)}$$

ЗАДАЧА 2. (Линейная модель электродвигателя) На горизонтальной поверхности стола расположены два параллельных проводящих рельса, по которым может скользить без трения проводящая переключка. Рельсы находятся в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B . К середине переключки привязана невесомая горизонтальная нить, перекинутая через блок, закреплённый на краю стола. К другому концу нити привязан груз массой m . Расстояние между рельсами равно l .

- (Режим генератора) Концы рельсов (дальние от блока) замкнули резистором сопротивлением R . Найдите ток в контуре и установившуюся скорость опускания груза.
- (Режим двигателя) Во втором случае те же концы замкнули источником тока с достаточно большой величиной ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением R . Полярность подключения источника выбрана так, что груз поехал вверх. С какой установившейся скоростью он будет двигаться? Что значит «достаточно большая» ЭДС? Убедитесь, что для механической мощности P , развиваемой двигателем, выполнено соотношение $P = \mathcal{E}_i I$, где \mathcal{E}_i — ЭДС индукции.

$$\frac{m g}{B l \mathcal{E} - m g R} = a : \frac{B l \mathcal{E}}{m g R} = a, \frac{m g}{B l \mathcal{E}} = I$$

Линейные электродвигатели имеют практическое применение (например, в лабораториях или в монорельсовом транспорте), однако более широкое распространение получили двигатели, преобразующие энергию источника тока в механическую энергию *вращательного* движения *ротора* (или, по-другому, *якоря*, который в простейшем случае является рамкой с током). Ротор, по обмоткам которого протекает электрический ток, находится в постоянном магнитном поле *статора* (неподвижного магнита¹) и вращается под действием силы Ампера, действующей со стороны магнитного поля на обмотки.

¹На практике существуют разные модели двигателей постоянного тока, и мы не претендуем на общность их описания или используемой терминологии. Наша цель — научиться адекватно понимать условия олимпиадных задач и уверенно их решать, а для этого введённых терминов вполне достаточно.

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 2010, финал, 11) Униполярный индуктор представляет собой быстро вращающийся постоянный магнит в форме диска. Диск выполнен из магнитного сплава, способного создавать сильное магнитное поле, и покрыт тонким проводящим слоем никеля.



При вращении диска между осью вращения и боковой поверхностью возникает разность потенциалов, которую можно измерить с помощью неподвижного вольтметра (рис. слева). Если же к оси вращения и боковой поверхности подсоединить батарейку, то магнит начнёт быстро вращаться, превратившись в электродвигатель. Точно так же, если быстро вращать вал обычного электромотора, то он превращается в генератор, и наоборот, если на электрический генератор подать напряжение, то он превращается в электромотор.

На рисунке справа показана схема такого реально работающего *униполярного электродвигателя*, ротором которого является сильный постоянный магнит в форме диска радиуса $r_0 = 2$ см, насаженного на ось. При подключении с помощью скользящих контактов батарейки с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В диск начинает быстро вращаться.

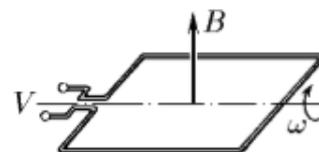
1) Что покажет неподвижный вольтметр на левом рисунке при частоте вращения диска $\nu = 3000$ об/мин? Какова полярность этой разности потенциалов? Укажите полярность на рисунке.

2) Пренебрегая трением, оцените предельную частоту вращения (об/мин) намагниченного диска (ротора униполярного электродвигателя на правом рисунке). Укажите направление вращения ротора при заданной на рисунке полярности батарейки и направлении вектора \vec{B} . Модуль вектора \vec{B} постояен и равен $B = 1$ Тл.

Примечание. Для упрощения расчётов считайте, что в проводящем никелевом слое вектор индукции \vec{B} магнитного поля перпендикулярен поверхности диска. Также для упрощения считайте, что ток в проводящем слое течёт вдоль радиуса.

$$1) U = \pi \nu B r_0^2 \approx 62,8 \text{ мВ}; 2) \nu_{\text{max}} = \frac{\pi B r_0^2}{\mathcal{E}} \approx 72000 \text{ об/мин}$$

ЗАДАЧА 4. (Савченко, 11.1.7) Индукция постоянного магнитного поля измеряется с помощью квадратной рамки, размеры которой $a \times a$, вращающейся с угловой скоростью ω . Ось её вращения перпендикулярна направлению магнитного поля. Амплитуда электрического напряжения, снимаемого с рамки, равна V . Найдите индукцию магнитного поля. Самоиндукцией проводов пренебречь.

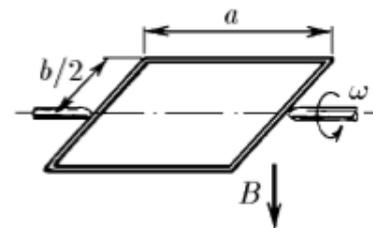


$$B = \frac{V}{a^2 \omega}$$

ЗАДАЧА 5. (Савченко, 11.1.8) Прямоугольная рамка, размеры которой $a \times b$, помещена в магнитное поле индукции B , причём в начальный момент времени плоскость рамки перпендикулярна линиям поля. Рамка вращается с угловой скоростью ω .

а) Постройте график зависимости тока, текущего в рамке, от времени. Сопротивление рамки R .

б) Как зависит от времени момент сил, необходимый для поддержания постоянной скорости вращения рамки?

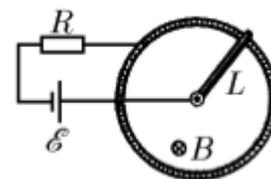


$$i \cos \alpha = \frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot \frac{d}{dt} (B a b \cos \alpha) = I \cos \alpha$$

ЗАДАЧА 6. (Савченко, 11.1.24) На рисунке изображена модель двигателя постоянного тока. ЭДС батареи \mathcal{E} , индукция магнитного поля B , сопротивление цепи R , длина перемычки L .

а) Определите установившуюся угловую скорость перемычки и ток в цепи, если сила трения в подвижном контакте F .

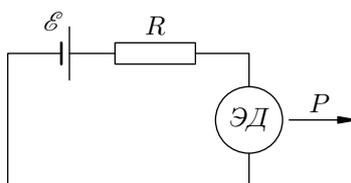
б*) Найдите зависимость угловой скорости перемычки от времени, если её начальная скорость равна нулю, а трением можно пренебречь.



$$\left(\frac{2\pi \mathcal{E} B L}{R} - \mathcal{E} - I \right) \frac{2\pi B L}{R} = (I) \omega \left(\frac{2\pi B L}{R} = I, \frac{2\pi B L \mathcal{E}}{(R \mathcal{E} - 2\pi B L I)} = \omega \right)$$

Основные формулы

Рассмотрим электродвигатель ЭД, подключённый к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} и развивающий механическую мощность P (рис.). Через R обозначено полное сопротивление цепи, то есть сумма сопротивления электродвигателя — движущейся перемычки (в линейной модели) или вращающейся рамки (ротора) — и внутреннего сопротивления источника.



Пусть I — ток в цепи. За время dt по цепи прошёл заряд $dq = Idt$, сторонние силы источника совершили работу $\mathcal{E}dq = \mathcal{E}Idt$; эта работа пошла на выделение тепла I^2Rdt и на механическую работу двигателя Pdt :

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + Pdt,$$

откуда

$$\mathcal{E}I = I^2R + P. \tag{1}$$

Кроме того, согласно правилу Кирхгофа

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_i = IR, \tag{2}$$

где $\mathcal{E}_i = d\Phi/dt$ — ЭДС индукции в электродвигателе. Мы поставили знак минус в левой части формулы (2), поскольку ЭДС индукции всегда направлена *против* ЭДС источника, и такой выбор знака технически удобнее при решении задач².

²Правильнее, конечно, было бы писать $\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = IR$ и $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$, но это принципиально ничего не меняет.

Третье основополагающее соотношение — пропорциональность ЭДС индукции и угловой скорости вращения ротора:

$$\mathcal{E}_i = \alpha\omega, \quad (3)$$

где α — некоторый коэффициент, зависящий от конструкции двигателя. Это очевидный результат дифференцирования магнитного потока, пронизывающего рамку.

Формулы (1), (2) и (3) составляют основу теории двигателей постоянного тока. *Решение задач (вплоть до финала Всеросса) обычно сводится к манипулированию этими формулами и не подразумевает глубокого проникновения в детали функционирования реальных электродвигателей.*

ЗАДАЧА 7. а) На примере линейной модели в задаче 2 вы уже убедились, что развиваемая двигателем механическая мощность равна произведению ЭДС индукции на силу тока: $P = \mathcal{E}_i I$. Выведите это соотношение из формул (1) и (2).

б) Вращающийся ротор вызывает вращение горизонтального цилиндрического вала радиусом a ; на вал намотана нить, а на другом конце нити висит груз массой m . В результате груз поднимается. К валу двигателя со стороны груза приложен механический момент $\mathcal{M} = mga$.

Покажите, что в установившемся режиме сила тока в обмотках ротора пропорциональна приложенному механическому моменту.

ЗАДАЧА 8. (Савченко, 11.1.27) Почему электродвигатель может сгореть, если остановить его ротор?

ЗАДАЧА 9. (Савченко, 11.1.29) Какую частоту разовьёт электродвигатель постоянного тока с постоянным магнитом, включённый в цепь с ЭДС \mathcal{E} при полном сопротивлении цепи R , если, работая в качестве динамо-машины, он развивает ЭДС \mathcal{E}_0 при частоте f_0 ? Момент силы трения на оси двигателя равен M .

$$\left(\frac{\mathcal{E}_0}{M} - \frac{\mathcal{E}}{R} \right) \omega f = f$$

ЗАДАЧА 10. Какую максимальную полезную мощность может развить двигатель, если он питается от сети с напряжением U и сопротивление обмотки якоря равно R ?

$$P_{\max} = \frac{U^2}{4R}$$

Старинные задачи МФТИ

Задачи 11–18 взяты из физтеховского задачника Баканиной, Белонучкина, Козела (Сборник задач по физике, М: Вербум-М, 2003); они предлагались на вступительных экзаменах в МФТИ в 1947–1967 годах.

ЗАДАЧА 11. (МФТИ) Электровоз движется со скоростью $v = 36$ км/ч и развивает в среднем силу тяги $F = 5 \cdot 10^4$ Н. Найдите силу тока, проходящего через двигатель электровоза (без учёта тепловых потерь), если напряжение на нём $U = 500$ В.

$$I = \frac{Fv}{U} = 1086 \text{ А}$$

ЗАДАЧА 12. (МФТИ) Электродвигатель питается от батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В. Какую мощность N развивает двигатель при протекании по его обмотке тока $I = 2$ А, если при полном затормаживании якоря по цепи течёт ток $I_0 = 3$ А?

$$N = I(\mathcal{E} - I_0 R) = 8 \text{ Вт}$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ) Чему равен КПД электродвигателя, если при включении его в сеть постоянного тока пусковой ток $I_0 = 15$ А, а в установившемся режиме сила тока снижается до $I = 9$ А?

$$\eta = \frac{I_0}{I} - 1 = \eta$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ) Электродвигатель постоянного тока, включённый в цепь батареи с ЭДС $\mathcal{E}_0 = 24$ В, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ Ом делает $n_1 = 600$ об/мин при силе тока в цепи $I = 0,2$ А. Какую ЭДС разовьёт тот же двигатель, работая в качестве генератора, при числе оборотов $n_2 = 1400$ об/мин?

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - IR = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 15. (МФТИ) Какую ЭДС развивает генератор постоянного тока, если при сопротивлении цепи $R = 300$ Ом на вращение ротора затрачивается мощность $N = 50$ Вт, а потери на трение составляют $\alpha = 4\%$ от затраченной мощности? Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затрачивать при сопротивлении цепи $R_1 = 60$ Ом?

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{N}{R}}(1 - \alpha) = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 16. (МФТИ) Груз массой m подвешен на нити, намотанной на ось якоря генератора постоянного тока. Нить сматывается с оси так, что груз опускается с постоянной скоростью v , если генератор замкнут на сопротивление R . Генератор запускают в качестве мотора, используя источник с ЭДС \mathcal{E} . С какой скоростью v_x поднимается вверх тот же груз, если известно, что эта скорость постоянна, а сопротивление цепи равно по-прежнему R ?

$$\left(1 - \frac{v}{v_x}\right) \mathcal{E} = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 17. (МФТИ) Мотор постоянного тока, питающийся от сети с напряжением $U = 120$ В, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ Ом развивает мощность $N = 160$ Вт. Какую ЭДС разовьёт тот же мотор, если его использовать как генератор, вращая якорь с той же скоростью, которую он имел, работая как двигатель? Какой смысл имеет неоднозначность полученного результата?

$$\mathcal{E} = \frac{U}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 - \frac{N}{R}}$$

ЗАДАЧА 18. (МФТИ) На горизонтальный вал мотора равномерно наматывается нитка, на которой подвешен груз массой $m = 0,8$ кг. Мотор питается от батареи аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и сопротивлением $r_1 = 0,4$ Ом. Сопротивление цепи мотора равно $r_2 = 3$ Ом. Сколько оборотов в секунду делает якорь, если по обмоткам мотора течёт ток силой $I = 3,3$ А? Радиус вала $a = 0,5$ см.

$$\omega = \frac{v}{a} = \frac{\mathcal{E} - I(r_1 + r_2)}{aI} = \omega$$

Современные олимпиадные задачи

Нижеследующие задачи, как нетрудно убедиться, мало отличаются от классики.

ЗАДАЧА 19. («Физтех», 2013) Для подзарядки аккумулятора используется динамомашинка (генератор) с сопротивлением обмотки ротора $R = 1$ Ом. Человек вращает ручку динамомашинки с частотой $n = 1$ об/с, прикладывая к ней силу $F = 20$ Н на расстоянии $\rho = 8$ см от оси вращения вдоль направления движения ручки. Через аккумулятор идёт ток $I = 1$ А. Из-за трения в механизмах динамомашинки теряется 20% затрачиваемой человеком мощности. Считать, что ротор вращается между полюсами постоянного магнита.

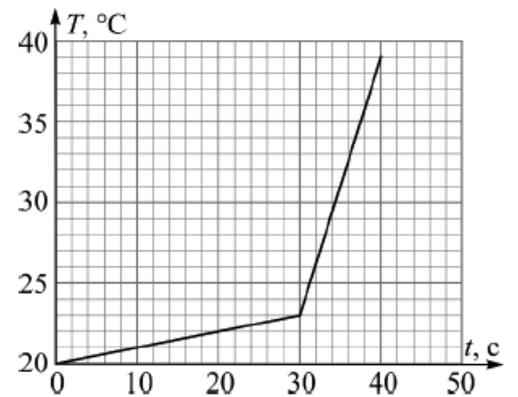
- 1) Какую мощность затрачивает человек?
- 2) Найти напряжение на зажимах динамомашинки.

$$P \approx 2\pi n \rho F = 10 \text{ Вт}; U \approx \frac{I}{0,8} R = 1,25 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 20. («Курчатов», 2019, 11) Электродвигатель постоянного тока подключён к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В. На вал двигателя намотана длинная лёгкая нить с грузом массы $m = 0,1$ кг. При работе двигателя груз поднимается с постоянной скоростью $v = 8$ см/с. Найдите силу тока I , текущего по цепи в этом случае. Известно, что при полном затормаживании вала двигателя по цепи течёт ток $I_0 = 50$ мА. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²; потери энергии на трение не учитывайте. Числовой ответ выразите в миллиамперах.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{0,1 \cdot 8}{50 \cdot 10}} \right) = 40 \text{ мА}$$

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2017, РЭ, 10) На электродвигатель постоянного тока установили датчик температуры. На верхнем этаже стройки поставили лебёдку, приводимую в движение этим двигателем. В начале рабочего дня лебедка стала поднимать груз массой $M = 67,5$ кг. Не доехав всего один этаж до лебёдки, груз зацепился. На каком этаже это произошло? Зависимость температуры двигателя от времени $T(t)$ изображена на рисунке. Известно, что на двигатель всегда подаётся одно и то же напряжение; трением в подшипниках двигателя и лебёдки пренебречь. Принять $g = 10$ м/с², высоту одного этажа 3 м, теплоёмкость электродвигателя $C = 4,5$ кДж/°С.



$$h = 3 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2017, РЭ, 11) При включении электродвигателя стеклоподъёмника одной двери автомобиля стекло поднимается из нижнего в верхнее положение за время t_1 . Если включить одновременно два стеклоподъёмника, то стекла поднимутся за время t_2 ($t_2 > t_1$).

1) За какое время t_3 поднимутся три стекла автомобиля при одновременной работе трёх стеклоподъёмников?

2) За какое время t_4 поднимутся все четыре стекла автомобиля при одновременной работе всех четырёх стеклоподъёмников?

Примечания. Считайте, что сила, необходимая для подъёма стекла, не зависит от скорости подъёма, а сила тяги F мотора стеклоподъёмника пропорциональна силе тока, идущего через него.

$$\frac{t_2 t_3 - t_1 t_4}{t_1 t_4} = t_2 ; \frac{t_2 - t_1 t_2}{t_1 t_4} = t_3$$

ЗАДАЧА 23. (Всеросс., 2002, ОЭ, 11) Игрушечный электропоезд массой $m = 500$ г с двигателем постоянного тока питается через рельсы от источника тока с напряжением $U_0 = 5$ В и движется с горизонтальной скоростью $v_0 = 20$ см/с. В некоторый момент времени источник отключают, а рельсы замыкают резистором с сопротивлением $R = 50$ Ом. Найдите тормозной путь L поезда, считая, что его колёса не проскальзывают. Сопротивлением обмоток электродвигателя, трением в подшипниках и другими потерями в двигателе пренебречь.

$$\text{или } s = \frac{0,5 U_0}{R v_0} = L$$

ЗАДАЧА 24. (Всеросс., 2002, финал, 11) Коллекторный двигатель питается от источника постоянного тока с напряжением $U = 12$ В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого электродвигателя, если магнитное поле в нём создается постоянными магнитами, а момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и механической нагрузки?

$$P_{\max} = U \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \frac{I_1}{2} = 50 \text{ Вт}$$