

## Динамика маятника

Во всех задачах, говоря о маятнике, мы имеем в виду математический маятник — маленький груз, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити. Кронштейн, на котором висит маятник, не мешает движению груза и нити. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**ЗАДАЧА 1.** Маятник массы  $m$  отклонили на угол  $90^\circ$  от положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Найдите силу натяжения нити в момент прохождения маятником положения равновесия.

бшг

**ЗАДАЧА 2.** Маятник массы  $m$  отклонили на угол  $\alpha \leq 90^\circ$  от положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Найдите силу натяжения нити в момент прохождения маятником положения равновесия.

$(v \cos \alpha - g) \cdot \frac{m}{g}$

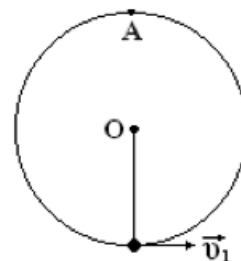
**ЗАДАЧА 3.** Маятник массы  $m$  вращается в вертикальной плоскости, совершая полный оборот. Найдите разность максимальной и минимальной сил натяжения нити.

бшг

**ЗАДАЧА 4.** Маленький груз висит в покое на невесомой нерастяжимой нити длины  $l$ . Какую минимальную горизонтальную скорость  $v_0$  надо сообщить грузу, чтобы он совершил полный оборот в вертикальной плоскости?

$\sqrt{5gl}$

**ЗАДАЧА 5.** (МОШ, 2019, 10) Маленький шарик, подвешенный на нити, может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси  $O$ . Экспериментатор обнаружил, что наименьшая скорость, которую нужно сообщить шарiku, чтобы он достиг верхней точки траектории (точки  $A$ ), равна  $v_1$ . Затем экспериментатор заменил нить лёгким стержнем той же длины, который может без трения вращаться вокруг оси  $O$ . Какую минимальную скорость нужно сообщить шарiku теперь, чтобы он достиг точки  $A$ ?

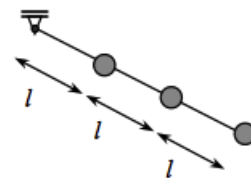


$v_1 \frac{g}{g} = \sqrt{5gl}$

**ЗАДАЧА 6.** Маленький груз висит в покое на невесомой нерастяжимой нити длины  $l$ . Грузу сообщают горизонтальную скорость  $v_0 = \sqrt{3gl}$ . На какой высоте  $h$  (над начальным положением груза) ослабнет нить? Опишите дальнейшее движение груза.

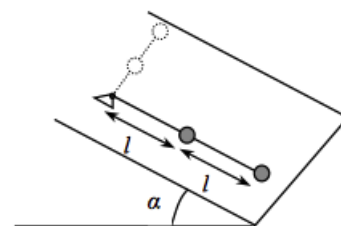
$h = \frac{2}{3}l$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2018, ШЭ, 10) Три небольших одинаковых шарика закреплены на прямой лёгкой спице, один из концов которой шарнирно прикреплен к потолку. Расстояния между соседними шариками и от шарнира до ближайшего к нему шарика одинаковы и равны  $l$ . Систему отклоняют, приведя спицу в горизонтальное положение, и отпускают без сообщения начальной скорости. Найдите отношение модулей сил натяжения спицы на её свободных участках в момент, когда система проходит положение равновесия.



57 : 44 : 25

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2018, ШЭ, 11) На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту находится система из двух небольших одинаковых шариков, закреплённых на лёгкой спице, верхний конец которой закреплён шарнирно на плоскости. Расстояния между шариками и от шарнира до ближайшего к нему шарика одинаковы и равны  $l$ . Систему выводят из положения равновесия, повернув спицу на  $90^\circ$  (при этом шарики касаются плоскости), и отпускают без сообщения начальной скорости. Найдите отношение модулей сил натяжения спицы на её свободных участках в момент прохождения спицей положения равновесия. Трением можно пренебречь.



17  
28

ЗАДАЧА 9. (Всеросс., 2016, ШЭ, 11) Шарик массой  $m$  подвешен на лёгкой нерастяжимой нити. Шарик отклоняют так, что нить составляет угол  $45^\circ$  с вертикалью, и отпускают. Найдите максимальный модуль силы натяжения нити в процессе движения шарика. Трением можно пренебречь.

$(2\sqrt{2} - 1) mg$

ЗАДАЧА 10. (МОШ, 2016, 11) Математический маятник колеблется с угловой амплитудой  $\varphi_0 = 0,1$  рад. В момент прохождения маятником нижней точки своей траектории скорость маятника резко увеличили в 2 раза. Найдите новую угловую амплитуду колебаний  $\varphi_1$ .

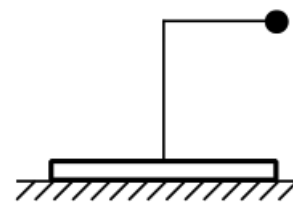
$\arccos \frac{1}{2} \approx 0,92 \text{ рад}$

ЗАДАЧА 11. («Физтех», 2016, 10–11) Маленький шарик массой  $m$  подвешен на нити и колеблется в вертикальной плоскости с угловой амплитудой  $\varphi_0 = \arccos 0,8$ .

- 1) Найти минимальную силу натяжения нити при колебаниях.
- 2) Найти максимальную силу натяжения нити при колебаниях.
- 3) Найти касательное ускорение шарика в момент, когда сила натяжения нити в 1,5 раза больше её минимального значения.

$0,8mg; 2,8mg; 2\sqrt{2}mg; 1,4g$

ЗАДАЧА 12. («Физтех», 2019, 10) Брусок, к вертикальной стойке которого на нити прикреплен шарик массы  $m$ , покоится на шероховатой горизонтальной поверхности. Нить с шариком отклонили до горизонтального положения и отпустили без начальной скорости. Шарик движется в вертикальной плоскости по окружности. Брусок начинает скользить по поверхности в тот момент, когда нить составляет с вертикалью угол  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .



Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности  $\mu = \frac{4}{7}$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Нить и стойка легкие.

- 1) Найдите силу  $T$  натяжения нити в этот момент.
- 2) Найдите массу  $M$  бруска.

$$m \frac{g}{6} = \left( v \cos \alpha - \frac{v^2}{r \sin \alpha} \right) v \cos \alpha \sin \alpha = N \sin \alpha \frac{v}{\sqrt{v^2 + g^2}} = v \cos \alpha \sin \alpha = L$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2012) Маленький шарик массой  $m$  висит неподвижно на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$ . Шарик толчком сообщают такую горизонтальную скорость, что при последующем движении шарик поднимается над начальной точкой на высоту, меньшую  $l$ , а минимальная сила натяжения нити равна  $mg/3$ . На какой высоте находился шарик в момент, когда сила натяжения нити равнялась  $mg$ ?

$$l \frac{6}{7} = y$$

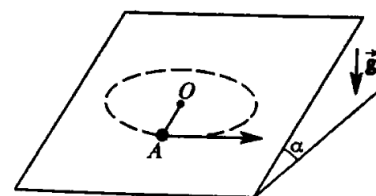
ЗАДАЧА 14. (МОШ, 2019, 10) Точка подвеса математического маятника длиной  $l = 20 \text{ см}$  и массой  $m = 0,6 \text{ кг}$  расположена на муфте массой  $M = 5 \text{ кг}$ , могущей скользить без трения по жёсткому неподвижному горизонтальному стержню. Удерживая муфту, маятник отклоняют от вертикали на угол  $\alpha = 60^\circ$ , и всю систему отпускают. Найти скорость  $u$  муфты, когда нить вертикальна. Ускорение свободного падения принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ . Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.

$$0,19 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 15. (МОШ, 2019, 11) Математическому маятнику длиной  $1 \text{ м}$  и массой  $200 \text{ г}$ , находящемуся в положении равновесия, сообщают начальную скорость  $1 \text{ м/с}$ . Найдите значение импульса силы натяжения нити за время, прошедшее от начала движения до первой остановки маятника. Угол отклонения маятника от вертикали считайте малым. Ускорение свободного падения принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ . Ответ выразите в  $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$  и округлите до целых.

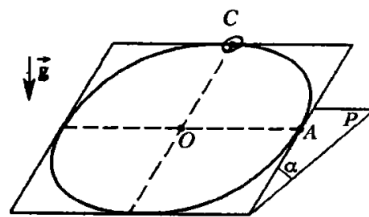
$$\frac{0,1}{\text{м}\cdot\text{с}}$$

ЗАДАЧА 16. (МФТИ, 1999) На гладкой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту в точке  $O$  прикреплена нить длиной  $l$ . К другому концу нити привязан небольшой шарик (см. рисунок). В начальный момент шарик находится в положении равновесия в точке  $A$ . Какую минимальную скорость надо сообщить шарiku в точке  $A$  вдоль наклонной плоскости в горизонтальном направлении, чтобы шарик совершил полный оборот, двигаясь по окружности?



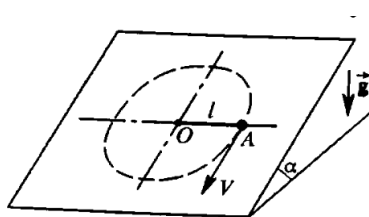
$$v \sin \alpha \sqrt{g \cos \alpha} = 0,9$$

Задача 17. (МФТИ, 1999) Обруч в форме окружности закреплён на столе в положении, когда его плоскость наклонена под углом  $\alpha$  к горизонтальной поверхности  $P$  стола (см. рисунок). По обручу может скользить без трения небольшое колечко массой  $m$ . Вначале колечко удерживают в верхней точке  $C$  обруча. В результате незначительного толчка колечко приходит в движение. Найти модуль силы, с которой колечко действует на обруч в точке  $A$ , находящейся на горизонтальном диаметре обруча.



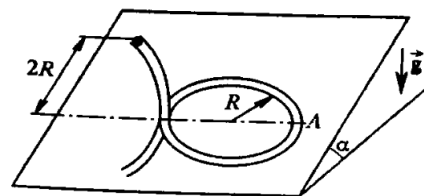
$$v_{\text{ц}} \sin \alpha + l \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} g t^2$$

Задача 18. (МФТИ, 1999) Небольшой шарик прикреплен с помощью нити длиной  $l$  к гвоздю, вбитому в доску с гладкой плоской поверхностью, наклонённой под углом  $\alpha$  к горизонту (см. рисунок). Вначале шарик удерживают на доске в точке  $A$ , слабо натянув нить горизонтально вдоль доски. Какую минимальную скорость  $v_0$  надо сообщить шарiku в точке  $A$  вдоль доски перпендикулярно нити, чтобы шарик совершил полный оборот, двигаясь по окружности?



$$v_{\text{ц}} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

Задача 19. (МФТИ, 1999) Тонкая трубка с петлёй в форме окружности радиуса  $R$  закреплена на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту (см. рисунок). В верхний конец трубки, находящийся на расстоянии  $2R$  от горизонтального диаметра петли, опускают без начальной скорости маленький шарик массой  $m$ . Шарик скользит внутри трубки без трения. С какой силой (по модулю) действует шарик на трубку в точке  $A$ , находящейся на горизонтальном диаметре петли?



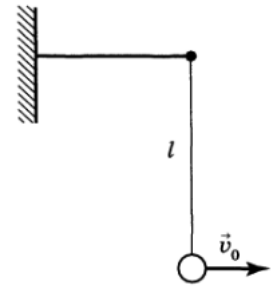
$$v_{\text{ц}} \sin \alpha \cos \alpha + l \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} g t^2$$

Задача 20. (Всеросс., 2015, РЭ, 11) Маленький шарик колеблется на лёгкой нерастяжимой нити в поле тяжести  $g$  с большой угловой амплитудой  $\alpha$ . Найдите величину ускорения, с которым движется шарик в те моменты времени, когда величина силы натяжения в 4 раза больше её минимальной величины. При каких значениях  $\alpha$  возможна такая ситуация?

$$0.06 > v \geq 0.09 : b = v$$

[Овчинкин] → 4.32.

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 1992, ОЭ, 11) Маленький шарик подвешен к балке на тонкой невесомой нити длиной  $l = 10$  см (рис.). Какую наименьшую скорость  $v_0$  необходимо сообщить шарiku в горизонтальном направлении, чтобы он ударился о кронштейн в точке подвеса?



$$v_0 = \sqrt{2gl} = 14 \text{ см/с}$$

ЗАДАЧА 22. Шар массы  $M$ , движущийся со скоростью  $u$ , сталкивается с неподвижным шаром массы  $m$ . Происходит абсолютно упругий центральный удар. Покажите, что при  $M \gg m$  скорость второго шара после удара будет приблизительно равна  $2u$ .

ЗАДАЧА 23. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) На двух невесомых нерастяжимых нитях почти одинаковой длины  $l = 108$  см подвешены рядом два небольших шарика, один из которых очень тяжёлый, а другой — очень лёгкий. Тяжёлый шарик отводят в сторону, так что его нить составляет угол  $\alpha = 57^\circ$  с вертикалью, и отпускают без начальной скорости. В результате происходит упругий лобовой удар тяжёлого шарика по лёгкому, причём перед ударом скорость тяжёлого шарика направлена горизонтально. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите максимальную высоту подъёма лёгкого шарика после удара. Ответ записать в см, округлив до целых.

$$h \approx 2l \cos^2 \alpha = 188 \text{ см}$$