Дифференциальные уравнения

Содержание

Многие законы физики формулируются на языке дифференциальных уравнений. Поэтому уметь интегрировать и решать хотя бы простейшие дифференциальные уравнения жизненно необходимо для решения физических задач.

1 Понятие дифференциального уравнения

Что это вообще такое — дифференциальные уравнения? Мы постараемся дать представление об этом на физическом примере.

Возьмём второй закон Ньютона: $ma = F$. Для простоты мы рассматриваем движение тела вдоль оси x, так что a и F суть проекции векторов ускорения и силы на данную ось. Величина a зависит от времени и является второй производной координаты:

$$a = a(t) = \ddot{x}(t).$$

Сила же, вообще говоря, может зависеть:

- от координаты x (например, закон Гука, закон всемирного тяготения, закон Кулона);
- от скорости $\dot{x}$ (например, сила сопротивления среды);
- явным образом от времени (например, движение заряда в меняющемся со временем электрическом поле).

В результате второй закон Ньютона даёт нам соотношение

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \tag{1}$$

Посмотрим, что получится в каком-нибудь содержательном конкретном случае. Возьмём маятник на пружине ($F_1 = -kx$), который движется в среде с вязким трением ($F_2 = -\alpha\dot{x}$), да к тому же имеет заряд q и находится в однородном электрическом поле, синусоидально меняющемся со временем ($F_3 = qE_0 \sin\omega t$). Уравнение (1) тогда примет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + qE_0 \sin\omega t. \tag{2}$$

Что с этим делать дальше? Наша конечная цель — *понять, как маятник движется*; иными словами, нам нужно решить *основную задачу механики* — найти зависимость координаты x маятника от времени, то есть функцию $x = x(t)$. Эту функцию как раз и требуется «извлечь» из уравнения (2). Для однозначного нахождения данной функции нужно ещё указать, в каком месте маятник находился в начальный момент времени и какую скорость при этом имел; иными словами, следует добавить *начальные условия*

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \tag{3}$$

Соотношение (2) служит примером *дифференциального уравнения*. Оно связывает искомую функцию $x(t)$ с её производными и является уравнением *относительно неизвестной функции* $x(t)$. Обратите внимание на это ключевое отличие дифференциальных уравнений от алгебраических: например, решая квадратное уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$, мы ищем *числа*, являющиеся его корнями; решая же дифференциальное уравнение $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, мы ищем *функцию* $x(t)$, при подстановке которой в данное уравнение получается верное равенство для любого t.

Возвращаясь от примера маятника к общему случаю, мы теперь можем сказать следующее: найти решение основной задачи механики означает решить дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (3).

2 Примеры дифференциальных уравнений

В дальнейшем мы будем чередовать «математическое» и «физическое» обозначения производной (штрихом и точкой соответственно). В «математической» ситуации запись $f'(x)$ означает производную функции f аргумента x; в «физической» же ситуации запись $\dot{x}(t)$ означает производную координаты x по времени t. Из контекста вам не составит труда определить, какие обозначения используются в каждом конкретном случае.

Задача 1. Число $e = 2{,}718281828459045\ldots$ — одна из важнейших констант математики и физики. Функция e^x замечательна тем, что совпадает со своей производной: $(e^x)' = e^x$.

1) Покажите, что функция $x(t) = 3e^t + 5e^{2t}$ служит решением дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0. \tag{4}$$

2) Покажите, что функция

$$x(t) = Ae^t + Be^{2t}, \tag{5}$$

где A и B — произвольные константы, служит решением дифференциального уравнения (4).

Оказывается, что формула (5) даёт *общее решение* данного дифференциального уравнения; а именно, можно доказать, что любое решение уравнения (4) имеет вид (5) при некоторых значениях констант A и B (иными словами, никаких других решений, помимо функций вида (5), у уравнения (4) нет).

Задача 2. Найдите решение уравнения $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

$\boxed{x = 2e^t - e^{2t}}$

Задача 3. (*Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*) Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \tag{6}$$

с постоянными коэффициентами p и q. Сопоставим ему *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

(то есть квадратное уравнение относительно λ с теми же коэффициентами). Предположим, что характеристическое уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2. Покажите, что функция

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{7}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы, служит решением уравнения (6).

Можно доказать, что функциями вида (7) исчерпываются все решения уравнения (6); или, в уже известной вам терминологии, функция (7) является общим решением уравнения (6) в том случае, когда характеристическое уравнение имеет два различных корня.

Всё это несколько проясняет, зачем нужны *два* начальных условия (3). Дело в том, что второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению *второго* порядка (то есть наивысшая производная в нём — вторая), общее решение которого содержит *две* произвольные константы. Для определения значений этих констант нужны *два* дополнительных независимых алгебраических уравнения, которые как раз и возникают в результате задания начальных значений функции и её производной (в чём вы могли убедиться, решая задачу 2).

Задача 4. Покажите, что функция $x(t) = 2\cos 3t + 4\sin 3t$ служит решением дифференциального уравнения $\ddot{x} + 9x = 0$.

Задача 5. *Уравнение гармонических колебаний* — это дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{8}$$

Покажите, что функция

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{9}$$

где A и B — произвольные константы, служит решением уравнения (8).

Можно доказать, что функция (9) является общим решением уравнения (8). Методом вспомогательного угла можно получить эквивалентную запись функции (9):

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Здесь $x_m = \sqrt{A^2 + B^2}$ — амплитуда колебаний, α — начальная фаза.

Задача 6. Найдите решение уравнения $\ddot{x} + 4x = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 6$.

$\boxed{x = 3\sin 2t}$

Задача 7. Найдите общее решение уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = a$, где a — константа.

$\boxed{x = \frac{a}{\omega^2} + A\cos\omega t + B\sin\omega t}$

Всё, что мы делали до сих пор, сводилось к простым техническим действиям: требовалось лишь подставлять и дифференцировать. Сложностей не возникало, поскольку вид общего решения сообщался заранее (мы знали, *что именно* надо подставлять). Во многих случаях, однако, главная проблема заключается в том, что вид общего решения дифференциального уравнения заранее *неизвестен*, то есть уравнение надо *решать*.

В процессе решения дифференциальных уравнений часто приходится *интегрировать*, то есть выполнять операцию, обратную дифференцированию. Поэтому для начала надо поупражняться в простом интегрировании.

3 Первообразная и определённый интеграл

Пусть дана функция $f(x)$. Её *первообразной* называется функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$.

Задача 8. Найдите первообразную функции: 2 (константа), x, x^2, x^3, e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Первообразных у функции $f(x)$ много: если $F(x)$ — одна из них, то, например, $F(x)+1$ или $F(x)-2$ также будут первообразными.

Задача 9. Докажите, что любые две первообразные данной функции отличаются на константу; иными словами, всё семейство первообразных данной функции имеет вид $F(x)+C$, где $F(x)$ — какая-то одна из первообразных, C — произвольная постоянная.

Семейство всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом*:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{10}$$

В этом контексте произвольная константа C называется *константой интегрирования*. Про неё никогда не надо забывать!

Задача 10. Вычислите неопределённый интеграл от функции: A (константа), x^α ($\alpha \neq -1$), $\sqrt{x}$, $x\sqrt[3]{x}$, $e^{\alpha x}$, $3\cos 2x + 4\sin 2x$. Результат запишите в виде (10).

Через первообразную выражается *определённый интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью x. Именно, справедлива *формула Ньютона — Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Задача 11. Найдите площадь под графиком функции:
а) $y = x^2$ на отрезке $[1;2]$;
б) $y = \sin x$ на отрезке $[0;\pi]$;
в) $y = e^{-x}$ при $x \geqslant 0$.

а) 7/3; б) 2; в) 1

4 Непосредственное интегрирование дифференциального уравнения

В самом простом случае дифференциальное уравнение допускает непосредственное интегрирование. Так, уравнение $y' = f(x)$ относительно неизвестной фнкции y имеет общее решение

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Задача 12. Решите уравнение $y' = 8x^3$ с начальным условием $y(1) = 0$.

$y = 2x^4 - 2$

Задача 13. Решите уравнение $y'' = 2$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

$\boxed{y = x^2 - 3x + 1}$

Задача 14. Решите уравнение $\ddot{x} = a$ (где a — константа) с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$

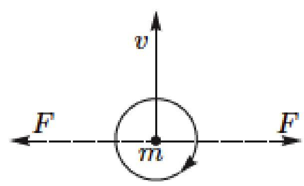
Задача 15. На оси x в точке $x = 0$ покоится частица массой m. В момент времени $t = 0$ на неё начинает действовать сила, линейно растущая со временем: $F = bt$. Найдите зависимость координаты частицы от времени.

$\boxed{x = \frac{bt^3}{6m}}$

Задача 16. На оси x в точке $x = 0$ покоится частица массой m и зарядом q. В момент времени $t = 0$ включается однородное электрическое поле, параллельное оси x и меняющееся со временем по закону $E = E_0 \sin \omega t$. Найдите зависимость координаты частицы от времени.

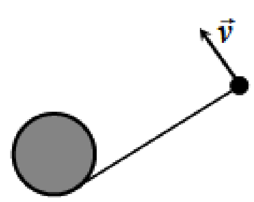
$\boxed{x = \frac{qE_0}{m\omega^2}(\omega t - \sin \omega t)}$

Задача 17. (*Всеросс., 2016, финал, 9*) На частицу массой m, имеющую скорость v, начинает действовать постоянная по модулю сила F, вектор которой за время действия τ поворачивается с постоянной угловой скоростью на угол $180°$ (см. рисунок). Векторы скорости частицы и силы всё время находятся в плоскости рисунка. В начальный момент угол между силой F и скоростью частицы составлял $90°$. Определите модуль и направление конечной скорости частицы u через время τ после начала действия силы F. Влиянием других сил можно пренебречь.



$\boxed{u = v \mp \frac{2F\tau}{\pi m}}$

Задача 18. (*«Росатом», 2017, 11*) На поверхности стола расположен вертикальный цилиндр радиуса R, на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого равна l_0, привязано тело. Телу сообщают скорость v, направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает наматываться на цилиндр (см. рисунок, вид сверху). Найти время, за которое на цилиндр намотается одна пятая часть нити. Трение отсутствует.



$\boxed{\tau = \frac{9l_0^2}{50vR}}$

5 Уравнения с разделяющимися переменными

Для начала напомним (на физическом уровне строгости!) понятие *дифференциала*. Пусть тело движется вдоль оси x и за малый промежуток времени dt совершает малое перемещение dx. Интервал dt полагаем настолько малым, что скорость тела $v = \dot{x}$ не успевает существенно измениться, так что движение можно считать почти равномерным; тогда $dx = vdt = \dot{x}dt$. Выражение $dx = \dot{x}dt$ и называется *дифференциалом* функции $x(t)$. Производная, как легко видеть, равна отношению дифференциала к приращению аргумента:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}\,.$$

Аналогично, в абстрактном «математическом» случае дифференциалом функции $y(x)$ называется выражение

$$dy = y'(x)dx,$$

где dx — приращение аргумента x. И снова производная есть отношение дифференциала к приращению аргумента:

$$y' = \frac{dy}{dx}\,.$$

Теперь вернёмся к дифференциальным уравнениям. В предыдущем разделе мы имели дело с простейшими уравнениями вида $y' = f(x)$ или $y'' = f(x)$, которые решались непосредственным интегрированием. Такое счастье, однако, выпадает редко. Гораздо чаще правая часть зависит ещё и от y, и вот тогда сложность возрастает многократно. Даже для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

никаких общих методов решения не существует — имеются лишь специальные приёмы для отдельных случаев правой части.

Для решения физических задач нам достаточно будет рассмотреть самую простую ситуацию, когда уравнение (11) допускает *разделение переменных*, то есть правая часть $f(x, y)$ распадается в произведение функции только от x на функцию только от y. Для удобства запишем это в виде $f(x, y) = p(x)/q(y)$, так что уравнение (11) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}\,, \tag{12}$$

или

$$p(x)dx = q(y)dy. \tag{13}$$

Интегрируем обе части равенства (13):

$$\int p(x)dx = \int q(y)dy,$$

и получим

$$P(x) = Q(y) + C, \tag{14}$$

где $P(x)$ и $Q(y)$ — первообразные функций $p(x)$ и $q(y)$ соответственно, C — произвольная постоянная (которая в физических задачах определяется из начальных условий). Равенством (14) решение уравнения (12) по сути заканчивается.

Может возникнуть вопрос: на каком основании мы взяли и «навесили интегралы» на обе части соотношения (13)? Заметим, что равенство (13) означает равенство дифференциалов: $dP(x) = dQ(y)$. Но из равенства дифференциалов — бесконечно малых приращений функций P и Q — вытекает и равенство их конечных приращений, а это и означает, что сами функции могут отличаться только на константу.

С учётом сказанного ясно, что на обе части равенства (13) можно «навесить» определённые интегралы:

$$\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx = \int\limits_{y_0}^{y} q(y)dy,$$

где x_0 и y_0 — начальные значения переменных, известные из условия задачи. В результате получим

$$P(x) - P(x_0) = Q(y) - Q(y_0).$$

Никакой произвольной константы C уже, разумеется, нет, ибо начальные условия учтены.

Нет принципиальной разницы, как действовать: или навешивать неопределённые интегралы и потом вычислять константу интегрирования, или навешивать определённые интегралы (с пределами интегрирования, ясными из условия) и пользоваться формулой Ньютона — Лейбница. Конечный результат получится одинаковым.

Перед тем, как продемонстрировать метод разделения переменных, сделаем следующее замечание. Вычисляя в задаче 10 неопределённый интеграл от функции x^α, вы наверняка обратили внимание на ограничение $\alpha \neq -1$. И действительно, попытка подставить значение $\alpha = -1$ в формулу

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

ни к чему хорошему не приводит. Но ведь никто не запрещает нам интегрировать функцию $x^{-1} = 1/x$; чему же равен интеграл $\int \frac{dx}{x}$?

Чтобы ответить на этот вопрос, введём очень важную функцию, с которой вам часто придётся сталкиваться в дальнейшем. Логарифм числа x по основанию e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$. Функция $\ln x$ является обратной для функции e^x, и её производная вычисляется обычным приёмом:

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^y \quad \Rightarrow \quad x' = (e^y)' \quad \Rightarrow \quad 1 = e^y \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}\,.$$

Итак,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\,,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x > 0).$$

Покажем наконец, как на практике работает метод разделения переменных. Решим дифференциальное уравнение

$$y' = 2xy$$

с начальным условием $y(0) = 1$. В процессе решения мы будем делить на y, поэтому заметим сразу: функция $y = 0$, являясь решением данного уравнения, не удовлетворяет начальному условию и нас не интересует, так что деление на y не приведёт к потере решений.

В соответствии с вышеизложенным, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \quad \Rightarrow \quad \ln y = x^2 + C.$$

Подставляя сюда начальные условия $x = 0$ и $y = 1$, получим $C = 0$. Поэтому

$$\ln y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{x^2}.$$

(В цепочке импликаций мы во избежании излишнего занудства сознательно допустили одну небрежность. Вы заметили её?)

Задача 19. (*«Росатом», 2020, 9*) Тело движется вдоль оси x из точки с координатой x ($x > 0$). Проекция скорости тела на ось x зависит от его координаты x по закону $v_x = \frac{c}{x}$, где $c > 0$ — известная постоянная. Через какое время тело окажется в точке с координатой $2x$?

$\boxed{t = \frac{3x^2}{2c}}$

Задача 20. (*Всеросс., 2008, финал, 9*) Автомобиль стартует с ускорением a_0. Из-за сопротивления воздуха ускорение падает по мере увеличения скорости v по закону $a \sim (v_0+v)^{-1}$, где v_0 — известный коэффициент.

1) Постройте график, изображающий связь между a и v, выбрав координаты так, чтобы он являлся отрезком прямой линии.

2) Через какое время t_0 после начала движения автомобиль достигает скорости v_0?

3) Определите зависимость скорости v от времени t и постройте (качественно) график $v(t)$.

1) $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right)$; 2) $t_0 = \frac{3v_0}{2a_0}$; 3) $v = v_0\left(\sqrt{1 + \frac{2a_0 t}{v_0}} - 1\right)$

Задача 21. (*«Росатом», 2017, 11*) Тело движется в некоторой среде. Известно, что сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости тела. Известно, что скорость тела уменьшилась в два раза через время T после начала движения. Через какое время после этого скорость тела уменьшится ещё втрое? Всеми другими силами, кроме силы сопротивления среды, пренебречь.

Через $4T$

Задача 22. (*«Росатом», 2018, 11*) Точечное тело начинает движение из точки $x = 0$ в положительном направлении оси x. Известно, что координата тела x и его скорость в процессе движения связаны соотношением

$$x = Av_x^2 + B,$$

где $A = -2$ с^2/м, $B = 2$ м. Вернётся ли тело в точку $x = 0$ и если да, то через какое время после выхода из неё?

Да; $\tau = 4\sqrt{-AB} = 8$ с

Задача 23. (*«Росатом», 2014, 11*) Тело движется вдоль оси x из точки с нулевой координатой так, что проекция его скорости на ось x зависит от координаты x по закону $v_x = \alpha\sqrt{x}$, где α — известная постоянная. Через какое время после начала движения тело будет иметь координату x_0?

$\tau = \frac{2\sqrt{x_0}}{\alpha}$

Задача 24. (*«Росатом», 2011, 11*) Имеется цилиндрический сосуд глубиной $H = 5$ м, полностью заполненный водой. В дне сосуда сделано отверстие, площадь которого в 40 раз меньше площади сечения сосуда. За какое время вся вода вытечет из сосуда? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Указание. Скорость истечения воды из малого отверстия, расположенного на глубине h, равна $\sqrt{2gh}$ (закон Торричелли).

$\tau = 40\sqrt{\frac{2H}{g}} = 40$ с

Задача 25. (*«Росатом», 2015, 11*) Цилиндр из твёрдой углекислоты радиуса R и высотой $h = R/2$ стоит на одном из своих оснований на плоской поверхности. Углекислота испаряется так, что с единицы площади в единицу времени испаряется масса σ. За какое время вся углекислота испарится? Плотность углекислоты ρ.

$t = \frac{\rho R}{2\sigma}$

Следующие задачи (с пометкой *МФТИ*) взяты из физтеховского задачника для студентов: *Д. А. Заикин, В. А. Овчинкин, Э. В. Прут. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 1. 1998*; условия иногда незначительно изменены. Эти задачи предлагаются первокурсникам Физтеха на семинарах уже в сентябре (первые темы занятий — «Динамика материальной точки» и «Статика»); поэтому, разумеется, абитуриент МФТИ должен уметь делать подобные вещи.

Задача 26. (*МФТИ*) Лодка под парусом развила скорость v_0. Как будет убывать во времени скорость движения лодки по стоячей воде после спуска паруса, если сопротивление воды движению лодки можно считать пропорциональным квадрату скорости ($f = \alpha v^2$)? Как долго будет двигаться лодка? Какой путь она пройдёт до полной остановки? Масса лодки равна m.

$v = \frac{mv_0}{m+\alpha v_0 t}$; $t \to \infty$; $x = \frac{m}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\alpha v_0 t}{m}\right) \to \infty$

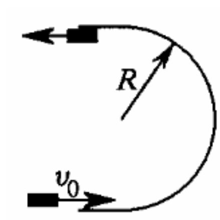
Задача 27. (*МФТИ*) Те же вопросы, что и в предыдущей задаче, но в предположении, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки ($f = \alpha v$).

$v = v_0 e^{-\frac{\alpha t}{m}}$; $x = \frac{mv_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)$; $x_\infty = \frac{mv_0}{\alpha}$

Задача 28. (*МФТИ*) Тело массой m брошено вертикально вверх со скоростью v_0. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела. Найдите зависимость скорости тела от времени.

$v = -\frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha t}{m}}$

Задача 29. (*МФТИ*) Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (см. рисунок). Определить время, через которое брусок покинет эту область. Радиус забора R, коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора равен μ. Трением бруска о горизонтальную поверхность пренебречь, размеры бруска много меньше R.



$t = \frac{R}{\mu v_0}\left(e^{\pi\mu} - 1\right)$

Задача 30. (*МФТИ*) На врытый в землю столб навита верёвка. За один конец верёвки тянут с силой $F = 10000$ Н. Какую силу надо приложить к другому концу верёвки, чтобы она не соскользнула со столба? Коэффициент трения верёвки о столб $\mu = 1/\pi$. Верёвка обвита вокруг столба два раза.

$F_1 = Fe^{-4} \approx 183$ Н