Консервативные системы

Данный листок является непосредственным продолжением листка «Работа и энергия». В частности, мы продолжаем иметь дело с консервативными силами — а именно, силой тяжести и силой упругости.

Пусть точечное тело движется в поле консервативной силы. При перемещении тела из точки *1* в точку *2* поле совершает некоторую работу A. По теореме о кинетической энергии

$$A = K_2 - K_1,$$

а по определению потенциальной энергии

$$A = U_1 - U_2. \tag{1}$$

Отсюда $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$ или

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \tag{2}$$

Сумма $K + U$ кинетической и потенциальной энергий тела называется его *механической энергией*. Равенство (2) выражает *закон сохранения механической энергии*: *если на тело действуют только консервативные силы, то его механическая энергия остаётся неизменной.*

Мы называем систему тел *консервативной*, если она находится под действием только консервативных сил. В таком случае можно ввести понятие *потенциальной энергии системы*; именно, каждому состоянию системы отвечает потенциальная энергия, равная работе консервативных сил по переводу системы из данного состояния в «нулевое» (в котором потенциальная энергия принимается равной нулю). Фактически потенциальная энергия системы есть сумма потенциальных энергий, соответствующих каждой из консервативных сил; так, потенциальная энергия вертикального пружинного маятника равна сумме потенциальной энергии mgh в поле силы тяжести и потенциальной энергии $\frac{kx^2}{2}$ деформированной пружины.

Кинетической энергией системы тел называется сумма кинетических энергий тел, входящих в систему. Механическая энергия системы — это сумма её кинетической и потенциальной энергий.

Можно показать, что для консервативной системы выполняется закон сохранения энергии: *механическая энергия консервативной системы остаётся постоянной с течением времени*. В целом доказательство этого утверждения такое же, как и наш вывод формулы (2) для одного тела. Имеется лишь небольшая тонкость в обосновании формулы (1) для случая системы тел; подробнее смотрите в Сивухине (§ 25, пп. 1 и 2).

[Овчинкин] → <u>4.28</u>, 4.31, <u>4.33</u>, <u>4.56</u>, <u>4.112</u>, 4.120, 4.136.

Задача 1. (*МФТИ, 1976*) Цирковой гимнаст падает с высоты $H = 1{,}5$ м на туго натянутую упругую предохранительную сетку. Каково будет максимальное провисание гимнаста в сетке, если в случае спокойно лежащего в сетке гимнаста провисание $l = 0{,}1$ м?

$\boxed{x = l + \sqrt{l^2 + 2lH} = 0{,}66\ \text{м}}$

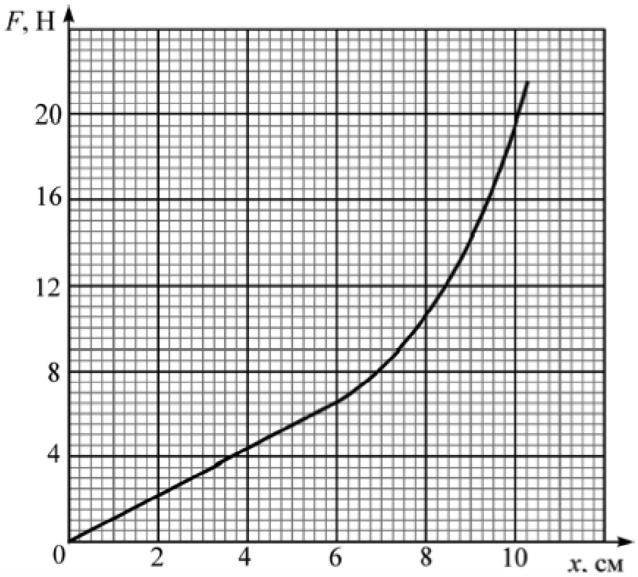
Задача 2. (*МОШ, 2018, 10*) Два тела массами 100 г и 300 г, соединённые невесомой пружиной жёсткости 750 Н/м, движутся со скоростью 5 м/с по гладкому горизонтальному столу к абсолютно упругой стенке. Пружина в процессе движения горизонтальна и её ось перпендикулярна стенке. Найдите максимальную деформацию пружины после абсолютно упругого отражения от стенки тела массой 300 г.

$x = v\sqrt{\frac{3(m_1+m_2)}{4k}} = 10$ см

Задача 3. (*«Курчатов», 2018, 10*) Два одинаковых груза массой $m = 100$ г каждый соединены лёгкой вертикальной пружиной. Жёсткость пружины $k = 50$ Н/м. Изначально верхний груз удерживают неподвижно, и система находится в равновесии. Затем верхний груз отпускают. Определите начальное удлинение x_1 пружины и максимальное удлинение x_2 пружины в процессе движения. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

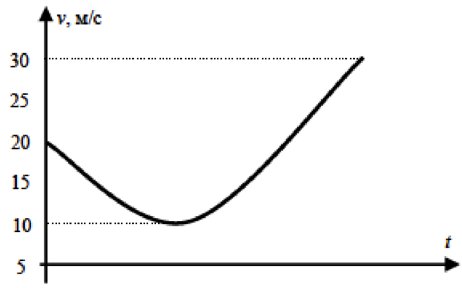
$x_1 = x_2 = 2$ см

Задача 4. (*МОШ, 2012, 2014, 10*) На рисунке показан график зависимости модуля силы F растяжения пружины от её удлинения x (при больших деформациях пружина не подчиняется закону Гука). Пружину прикрепляют одним концом к потолку. К другому концу пружины, не деформируя её, аккуратно подвешивают груз массой $m = 650$ г, после чего отпускают груз без начальной скорости. Оцените, на какую максимальную длину растянется пружина. Трением и массой пружины пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



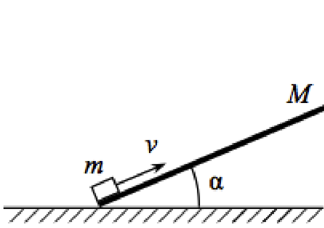
$x_0 \approx 10$ см

Задача 5. (*МОШ, 2017, 11*) На графике представлена зависимость модуля скорости шарика, брошенного под углом к горизонту с балкона, от момента броска до падения на землю. Определите, под каким углом был брошен шарик и на какой высоте над землёй находится балкон. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. $g = 10$ м/с^2.



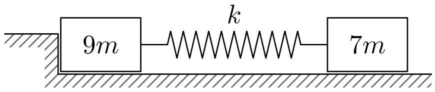
60°; 25 м

Задача 6. (*МОШ, 2018, 11*) Груз массой m толкнули вверх по гладкой доске массой M и длиной l, шарнирно закреплённой в точке O (см. рис.). Доска с горизонтом составляет угол α, расстояние $OA = h < l/2$. Какую скорость v нужно сообщить грузу, чтобы нижний конец доски оторвался от пола?



$v \geqslant \sqrt{2g\left(l - h + \frac{M(l-2h)}{2m}\right)\sin\alpha}$, если $\frac{M}{m} < \frac{2h}{l-2h}$; иначе решения нет

Задача 7. (*«Физтех», 2011*) На гладкой горизонтальной поверхности стола находятся бруски массами $9m$ и $7m$, к которым прикреплена лёгкая упругая пружина жёсткостью k, сжатая на величину x_0 (см. рисунок). Брусок массой $7m$ удерживают неподвижно, другой брусок прижат к упору. Затем брусок массой $7m$ отпускают.



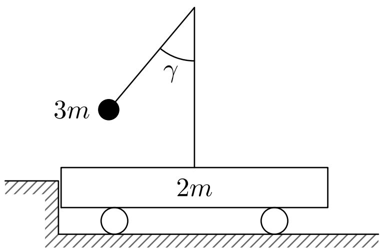
1) Найдите скорость бруска массой $7m$ в момент отрыва другого бруска от упора.

2) Найдите величину деформации пружины при максимальном расстоянии между брусками в процессе их движения после отрыва от упора.

Примечание. Величиной деформации называется модуль разности длин пружины в напряжённом и ненапряжённом состояниях.

1) $v = x_0\sqrt{\frac{k}{7m}}$; 2) $x = \frac{3}{4}x_0$

Задача 8. (*«Физтех», 2011*) На горизонтальной поверхности стола находится платформа с укреплённым на ней штативом. К штативу привязан на нити длиной l небольшой по сравнению с длиной нити шар. Масса платформы со штативом $2m$, масса шара $3m$. Шар отклоняют и удерживают неподвижно так, что нить составляет угол γ ($\cos\gamma = 1/3$) с вертикалью, а платформа прижата к упору (см. рисунок). Затем шар отпускают.



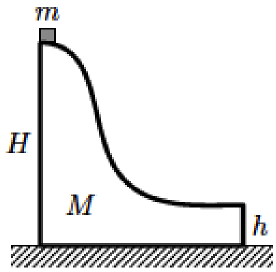
1) Найдите скорость шара в момент отрыва платформы от упора.

2) Найдите максимальный угол отклонения нити от вертикали направо в процессе движения системы после отрыва от упора.

Направления всех движений параллельны одной и той же вертикальной плоскости. Массой колёс платформы пренебречь.

1) $v = \sqrt{\frac{4}{3}gl}$; 2) $\alpha = \arccos\frac{11}{15}$

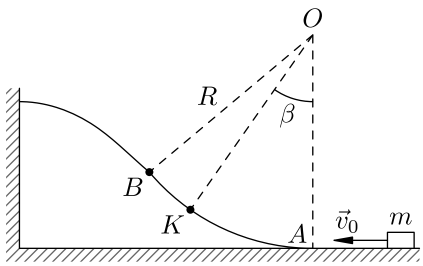
Задача 9. (*«Курчатов», 2017, 11*) Небольшая шайба массой m скатывается с вершины гладкой горки массой M и высотой H. Горка находится на гладкой поверхности. На какой высоте h над поверхностью должен находиться нижний горизонтальный участок горки для того, чтобы шайба упала на поверхность на максимальном расстоянии от точки поверхности, над которой произошел отрыв? Чему равно это расстояние, если $m : M = 19 : 81$, а высота горки $H = 1$ м?



$h = H/2$; $L_{\max} = H\sqrt{\frac{M}{M+m}} = 0{,}9$ м

Задача 10. (*МФТИ, 2001*) На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка, упирающаяся в гладкую вертикальную стенку (см. рисунок). Участок AB профиля горки — дуга окружности радиусом R. По направлению к горке движется со скоростью v_0 небольшая по сравнению с размерами горки монета массой m. Монета въезжает на горку, движется по горке без трения, не отрываясь от неё, и достигает точки K, продолжая движение. Радиус OK составляет с вертикалью угол β ($\cos\beta = 5/7$).

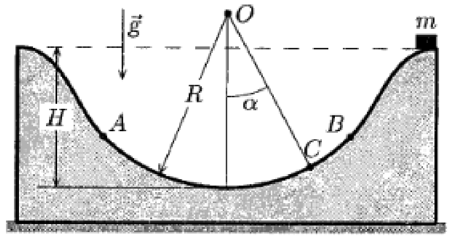
1) Найти скорость монеты в точке K.
2) Найти силу давления горки на стенку в момент прохождения монетой точки K.



1) $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{7}gR}$; 2) $F = \frac{2\sqrt{6}}{7}m\left(\frac{v_0^2}{R} + \frac{g}{7}\right)$

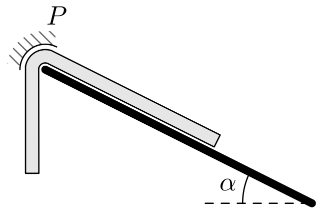
Задача 11. (*МФТИ, 2001*) На горизонтальной поверхности стола покоится чаша с небольшой по сравнению с чашей шайбой массой m (см. рисунок). Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R. Глубина чаши $H = 3R/5$, её внутренняя поверхность гладкая. Шайба начинает скользить без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остаётся в покое. Шайба достигает точки C, для которой угол между радиусом OC и вертикалью равен α ($\cos\alpha = 4/5$).

1) Найти скорость шайбы в точке C.
2) Найти силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C.



1) $v = 2\sqrt{\frac{gR}{5}}$; 2) $f = mg\left(\frac{2H}{R} + 3\cos\alpha - 2\right)\sin\alpha = \frac{24}{25}mg$

Задача 12. (*МФТИ, 1998*) На доске, наклонённой под углом 30° к горизонту, удерживают в покое однородную гибкую верёвку длиной $l = 40$ см так, что на доске лежит 4/7 длины верёвки, а 3/7 висит вертикально (см. рисунок). Трение верёвки о доску и направляющий желоб P пренебрежимо мало. Верёвку отпускают, и она движется, оставаясь в одной и той же вертикальной плоскости.

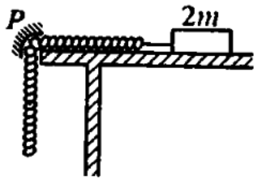


1) Найти ускорение верёвки в начальный момент движения.

2) Найти скорость верёвки в момент, когда соскользнёт с доски и примет вертикальное положение.

1) $a = \frac{g}{7}(3 - 4\sin\alpha) = \frac{g}{7} \approx 1{,}4$ м/с^2; 2) $v = \frac{2}{7}\sqrt{2gl(5 - 2\sin\alpha)} \approx 1{,}6$ м/с

Задача 13. (*МФТИ, 1998*) Однородный гибкий канат массой m и длиной $L = 75$ см прикреплён к бруску масой $2m$, находящемуся на горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Со стола свешивается половина длины каната. Коэффициент трения бруска о стол $\mu = 0{,}15$. Трением каната о стол и направляющий желоб P пренебречь. Брусок удерживают в покое, а затем отпускают.

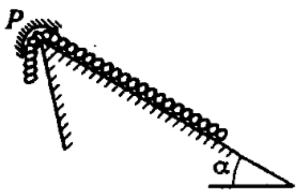


1) Найти ускорение бруска в начале движения.

2) Найти скорость бруска в момент, когда канат соскользнёт со стола.

1) $a = \frac{g}{6}(1 - 4\mu) \approx 0{,}65$ м/с^2; 2) $v = \sqrt{\frac{3-8\mu}{12}gL} \approx 1$ м/с

Задача 14. (*МФТИ, 1998*) Цепочку длиной $l = 20$ см удерживают в покое на клине так, что на наклонённой под углом α ($\sin\alpha = 3/5$) к горизонту поверхности клина лежит 2/3 цепочки, а 1/3 висит (см. рисунок). Трение цепочки о клин и направляющий желоб P пренебрежимо мало. Цепочку отпускают, и она «заползает» на клин, оставаясь в одной и той же вертикальной плоскости.

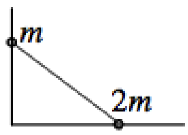


1) Найти ускорение цепочки в начальный момент движения.

2) Найти скорость цепочки в момент, когда она полностью окажется на клине.

1) $a = \frac{g}{3}(2\sin\alpha - 1) \approx 0{,}65$ м/с^2; 2) $v = \frac{1}{3}\sqrt{(5\sin\alpha - 1)gL} \approx 0{,}66$ м/с

Задача 15. (*«Росатом», 2012, 11*) Стержень согнули под углом 90° и расположили так, что одна из сторон получившегося угла вертикальна, а вторая горизонтальна. На каждую сторону угла надели маленькие массивные бусинки с массами m и $2m$ и соединили их невесомым стержнем длиной l. В начальный момент стержень вертикален. Затем от малого толчка он приходит в движение, и бусинки скользят по сторонам угла (см. рисунок). Найти максимальную скорость нижней бусинки в процессе последующего движения.



$v \approx 0{,}45\sqrt{gl}$ (результат приближённого решения уравнения $x^3 + 3x - 2 = 0$)

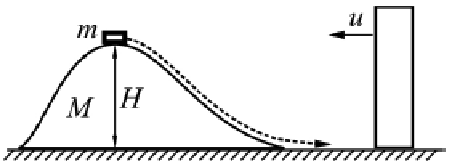
Задача 16. (*МОШ, 2012, 10*) «Водяная ракета» представляет собой полуторалитровую ($V = 1{,}5$ л) бутылку, в которую налито небольшое количество воды массой $m = 200$ г. Ракета несёт полезный груз, укреплённый на её корпусе снаружи. Бутылка заткнута резиновой пробкой, а давление воздуха в ней равно $p = 5$ атмосфер. Оцените, на какую высоту взлетит эта ракета, запущенная вертикально вверх из перевёрнутого положения в результате быстрого выброса воды после удаления пробки. В момент старта ракета была неподвижна. Общая масса взлетевшей ракеты с «боеголовкой» $M = 0{,}5$ кг. Считайте, что давление в бутылке при выбросе воды меняется не сильно. Массой пробки и воздуха в бутылке пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

$\boxed{h = \frac{4pm^2}{5\rho g M(M+m)} \approx 4{,}6 \text{ м}}$

Задача 17. (*МОШ, 2012, 11*) На лёгкой короткой нити к ветке сосны подвешена гирька массой $m = 1$ кг. К ней привязана другая лёгкая нить с длиной в недеформированном состоянии $L = 1$ м и жёсткостью $k = 1$ кН/м, на конце которой висит ещё одна гирька массой $m = 1$ кг. Система находилась в равновесии до момента, когда верхнюю нить перебил дятел. Гирьки упали на землю одновременно. Каково расстояние H от ветки до земли? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

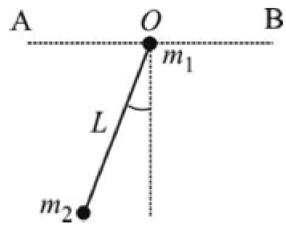
$\boxed{H = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{kL}{2mg}\right) = 25{,}5 \text{ м}}$

Задача 18. (*МОШ, 2010, 11*) На гладкой горизонтальной плоскости покоится гладкая горка высотой H и массой M, а на её вершине лежит небольшая шайба массой m (см. рисунок). После лёгкого толчка шайба скатывается с горки и скользит перпендикулярно массивной вертикальной стенке, движущейся по плоскости в сторону горки со скоростью u. Испытав абсолютно упругое столкновение со стенкой, шайба скользит в обратном направлении, к горке. С какой минимальной скоростью u должна двигаться стенка, чтобы шайба смогла преодолеть горку?



$\boxed{u = \frac{m}{M}\sqrt{2gH\frac{M}{M+m}}}$

Задача 19. (*МОШ, 2013, 10*) Два маленьких шарика 1 и 2, масса каждого из которых m, соединены невесомым стержнем длиной L. Первый шарик шарнирно закреплён в точке O, а второй шарик совершает колебания в вертикальной плоскости. В один из моментов, когда стержень был вертикален, верхний шарик освободили из крепления. Когда угол между стержнем и вертикалью оказался равным $\beta > 0$, шарик 2 приблизился к прямой AB на минимальное расстояние. С какой скоростью двигался шарик 2 в момент освобождения шарика 1? Сопротивлением воздуха пренебречь.

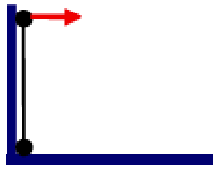


$\boxed{v = \sqrt{2gL\frac{\beta}{\sin\beta}}}$

Задача 20. (*МОШ, 2013, 11*) Гантель, состоящая из двух шариков массами m и $2m$ и лёгкого стержня длиной L, поставлена вертикально на гладкую горизонтальную поверхность более массивным шариком вниз. После небольшого толчка нижний шарик гантели начинает двигаться по горизонтальной поверхности, а верхний — двигаться в пространстве. Найдите модули скоростей v_1 и v_2 шариков в зависимости от синуса угла наклона β гантели к горизонту. Ускорение свободного падения равно g.

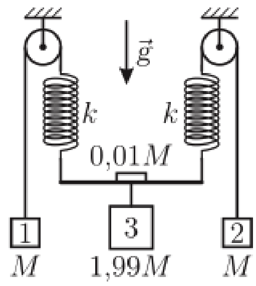
$v_1 = \sqrt{2gL\frac{(1-\sin\beta)(9-5\sin^2\beta)}{9-3\sin^2\beta}}$, $v_2 = \sqrt{2gL\frac{(1-\sin\beta)\sin^2\beta}{9-3\sin^2\beta}}$

Задача 21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Гантель из двух массивных одинаковых шариков и лёгкого жёсткого стержня поставлена вертикально в гладкий угол между вертикальной стеной и горизонтальным полом. Верхний шарик подталкивают от стены, сообщая ему скорость v_0 (но не сообщая скорости нижнему шарику). Каким будет угол наклона стержня к вертикали в тот момент, когда сила давления нижнего шарика на стенку будет максимальна? Длина стержня L, ускорение свободного падения g.



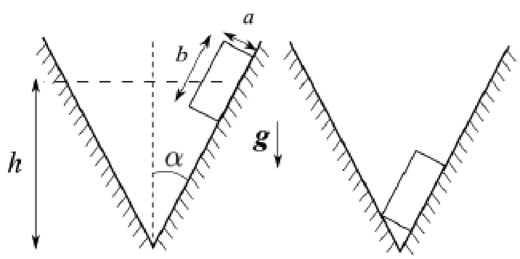
$\varphi = \arccos\left(\frac{v_0^2+2gL+\sqrt{v_0^4+4v_0^2gL+76g^2L^2}}{12gL}\right)$ при $v_0 < \sqrt{gL}$; если $v_0 \geqslant \sqrt{gL}$, то $N = 0$

Задача 22. (*МОШ, 2008, 10*) Лёгкая доска подвешена за края на двух пружинах жёсткостью k, к другим концам которых прикреплены нерастяжимые нити, перекинутые через неподвижные блоки и соединенные с грузами 1 и 2 массой M каждый (см. рисунок). На середине доски лежит шайба массой $0{,}01M$; к доске снизу под шайбой подвешен груз 3 массой $1{,}99M$. В некоторый момент времени нить, связывающая доску и груз 3, обрывается. На какую максимальную высоту относительно своего первоначального положения подскочит шайба? Нити, блоки и пружины считать невесомыми, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно g.



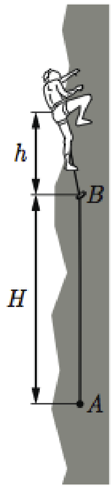
$h \approx 100\frac{Mg}{k}$

Задача 23. (*МОШ, 2016, 11*) Между двумя плоскостями, составляющими угол α, на поверхности одной из плоскостей находится брусок длиной b и высотой a. В начальный момент времени центр масс бруска находится на высоте h от линии пересечения плоскостей. Брусок отпускают без начальной скорости, он соскальзывает и касается своим ребром другой плоскости. Найдите скорость бруска в этот момент. Линия пересечения плоскостей параллельна поверхности земли. Трением пренебречь.



$v = \sqrt{2g\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha - \frac{a\cos\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}\right)}$

Задача 24. (*МОШ, 2019, 10*) При восхождениях на скальные стены один конец веревки привязывается к страховочной системе, которую надевает на себя идущий первым альпинист (лидер), оставшаяся часть верёвки находится у страхующего. В процессе подъёма лидер «прощёлкивает» тянущуюся за ним верёвку через карабины (металлические кольца с защёлкой), прикреплённые к стене в точках страховки (т. B на рис.). В случае срыва лидера страхующий, располагающийся в т. A (на рисунке не изображён), блокирует верёвку с помощью страховочного устройства. Фактором рывка r называется отношение глубины свободного падения лидера (пока верёвка не начнёт растягиваться) к длине верёвки между страхующим и лидером на момент срыва, например, $r = 2h$ для схемы на рис. Пусть между лидером и страхующим одна точка страховки (как на рис.), или вообще нет точек страховки ($H = 0$). Расположение лидера и точки страховки может быть любым, но величина $h + H$ должна быть меньше длины верёвки (≈ 50 м). Альпинисты находятся высоко над землёй, так что лидер при срыве может упасть ниже страхующего. Трением между верёвкой и карабином пренебрегаем.



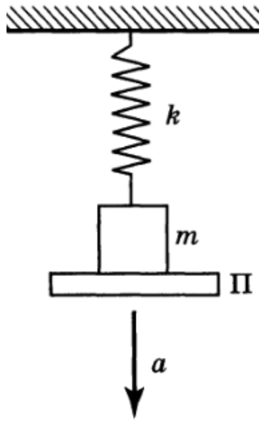
1. Найдите максимальное и минимальное возможное значение фактора рывка r.

2. Относительное растяжение некоторой верёвки, на которую подвешен груз массой $m = 80$ кг составляет 5%. Считая, что данная верёвка подчиняется закону Гука, определите максимально возможное относительное растяжение верёвки при срыве альпиниста массой m.

3. На самом деле при больших растяжениях верёвка не подчиняется закону Гука. При модельном срыве в лаборатории груза массой m с фактором $r_1 = 1{,}5$ максимальное относительное растяжение составило 40%. Пусть $W_{\text{эксп}}$ — максимальная энергия деформации верёвки, рассчитанная на основе теста, а $W_{\text{теор}}$ — энергия деформации, рассчитанная на основе закона Гука при том же относительном растяжении. Какая энергия больше и во сколько раз?

1) $r_{\max} = 2$, $r_{\min} = 0$; 2) $\frac{x}{h} = 0{,}5 = 50\%$; 3) $\frac{W_{\text{эксп}}}{W_{\text{теор}}} \approx 1{,}19$

Задача 25. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 9*) Груз массы m прикреплён к потолку лёгкой пружиной жёсткости k. В начальный момент времени груз лежит на подставке П, пружина не растянута, а её ось вертикальна (рис.). На какую максимальную длину L растянется пружина, если подставку начнут опускать с ускорением a? Постройте график зависимости $L(a)$. Попытайтесь подобрать удобные масштабы для переменных L и a.

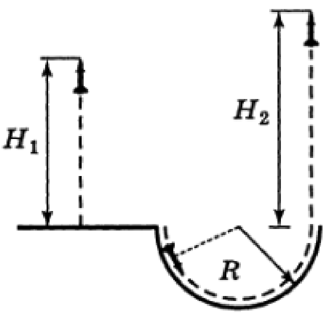


$$L = \begin{cases} \frac{mg}{k}\left(1 + \frac{\sqrt{a(2g-a)}}{g}\right), & \text{если } a < g; \\ \frac{2mg}{k}, & \text{если } a \geqslant g \end{cases}$$

Задача 26. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 10*) В высоком цилиндрическом сосуде радиуса $R = 4$ см с жидким гелием при температуре, близкой к абсолютному нулю (так что гелий является сверхтекучим и трением можно пренебречь), вертикально плавает ареометр — пластмассовый цилиндр радиуса $r = 3{,}9$ см и массой $m = 500$ г. В результате малых колебаний ареометра уровень гелия в сосуде тоже колеблется, причем амплитуда этих колебаний $x = 1$ мм. Найдите максимальную скорость v уровня поверхности гелия при этих колебаниях. Считайте, что капиллярными эффектами можно пренебречь, а плотность гелия $\rho = 122$ кг/м^3.

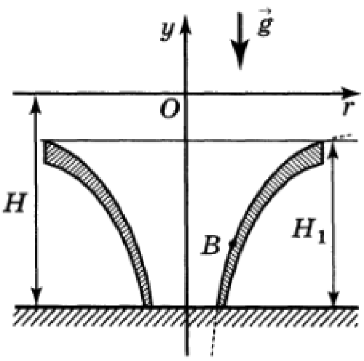
$v = rx\sqrt{\frac{\pi\rho g}{m}} = 3{,}5$ мм/с

Задача 27. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 11*) Некто предложил новый способ запуска ракет. Вместо того, чтобы запускать их вверх, он рекомендовал отпускать ракеты вниз по направляющим, образующим дугу большого радиуса R (рис.). В некоторый момент движения по направляющим следовало включать двигатель. Автор изобретения утверждал, что при таком запуске высота H_2 подъёма ракеты будет превышать высоту H_1, достижимую при обычном запуске (вертикально вверх). Полагая H_1 и R заданными, найдите максимально возможное значение высоты H_2. Считать, что двигатель ракеты работает короткий промежуток времени, а сопротивлением воздуха и трением между корпусом ракеты и направляющими можно пренебречь.



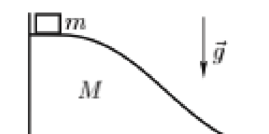
$H_2 = H_1 + 2\sqrt{H_1 R}$

Задача 28. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 11*) Небольшая шайба B скользит по гладкой внутренней поверхности воронки, описывая окружность в горизонтальной плоскости. В результате незначительного толчка вверх вдоль поверхности скольжения шайба сошла с орбиты и вылетела из воронки со скоростью v. Зная, что расстояние H от начала координат до дна воронки равно 100 см, $H_1 = 75$ см, найдите v. Считать, что для точек профиля внутренней поверхности воронки координата y обратно пропорциональна квадрату радиуса воронки r: $y \sim 1/r^2$ (см. разрез воронки на рис.).



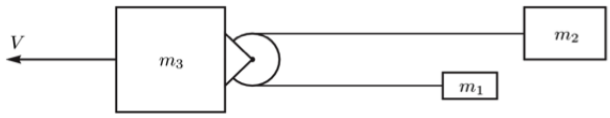
$v = \sqrt{2g(H - H_1)} \approx 3{,}8$ м/с

Задача 29. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11*) Слева направо по гладкой плоскости скользит тяжёлая горка массы M, на вершине которой покоится лёгкий груз массы m (см. рисунок). Кинетическая энергия K_1 груза в четыре раза меньше его потенциальной энергии П. Груз съезжает с горки без трения. Найдите его кинетическую энергию K_2, когда он окажется на плоскости. Считайте, что $\Pi = 1$ Дж, а $M \gg m$.



$K_2 = \frac{9}{4}\Pi = 2{,}25$ Дж

Задача 30. (*Всеросс., 2015, РЭ, 11*) На гладкой горизонтальной плоскости находятся три бруска, массы которых равны m_1, m_2 и m_3. На рисунке приведён вид сверху. Упругая лёгкая резинка связывает бруски 1 и 2 и проходит через блок, прикреплённый к бруску 3. Трения в системе нет. Исходно бруски неподвижны, а резинка чуть провисает. Бруску 3 ударом (мгновенно) сообщают скорость v.



1) Найдите скорости брусков в момент, когда растяжение резинки наибольшее.

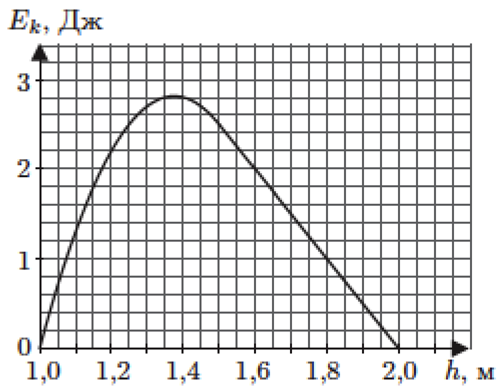
2) Какими будут скорости брусков, когда резинка снова провиснет?

3) В случае, когда $v = 1$ м/с, $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг найдите скорость третьего бруска, когда растяжение резинки наибольшее.

1) $v_1 = \frac{2m_2m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_2 = \frac{2m_1m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_3 = \frac{(m_1+m_2)m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$

2) $v_1 = \frac{4m_2m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_2 = \frac{4m_1m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_3 = \frac{(m_1m_3+m_2m_3-4m_1m_2)v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$

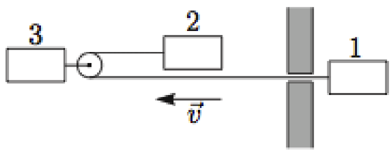
Задача 31. (*Всеросс., 2012, финал, 9*) На горизонтальном столе вертикально закреплена длинная гладкая труба, внутри которой установлена лёгкая пружина. Внутри трубы с высоты $H = 2$ м над столом без начальной скорости начинает падать шарик. Коснувшись верхнего витка пружины, шарик прилипает к нему. На рисунке приведён график зависимости кинетической энергии E_k падающего шарика от его высоты h над поверхностью стола. Определите длину L_0 недеформированной пружины, коэффициент жёсткости пружины k и массу шарика m. Считайте, что потери механической энергии в момент касания шариком верхнего витка пружины не происходит, и что закон Гука справедлив при любых деформациях пружины. Примите $g = 10$ м/с^2.



Примечание. Для расчётов используйте выданный Вам отдельно увеличенный рисунок.

$L_0 = 1{,}5$ м; $m = 0{,}5$ кг; $k = 40$ Н/м

Задача 32. (*Всеросс., 2015, финал, 10*) Три одинаковых бруска движутся с одинаковыми скоростями $\vec{v}$. Длинная лёгкая упругая резинка, связывающая первый и второй бруски, проходит сквозь отверстие в массивной стене и через лёгкий блок, прикреплённый к третьему бруску (см. рисунок). В начальный момент времени резинка не растянута. Определите скорости брусков после упругого столкновения первого бруска со стеной в момент времени, когда резинка оказалась



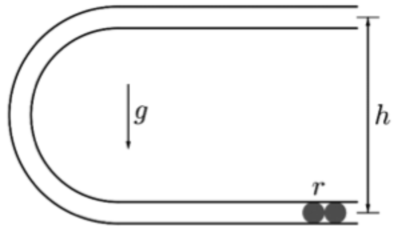
1) максимально растянутой;

2) снова ненатянутой.

Трение в системе не учитывайте. Считайте, что пока резинка не станет снова ненатянутой, груз 2 не сталкивается с блоком, а груз 1 не ударяется о стену.

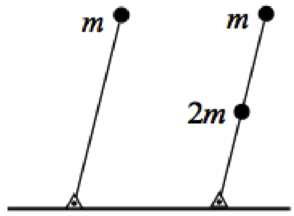
1) $v_1 = -\frac{2}{3}v$, $v_2 = \frac{4}{3}v$, $v_3 = \frac{1}{3}v$; 2) $v_1 = -\frac{1}{3}v$, $v_2 = \frac{5}{3}v$, $v_3 = -\frac{1}{3}v$

Задача 33. (*Всеросс., 2017, финал, 10*) Двум одинаковым соприкасающимся шарикам радиуса $r = 5$ см сообщают горизонтальную скорость u. Шарики движутся по нижнему колену закреплённой стоящей на боку U-образной трубки (рис.). Расстояние между осями колен $h = 1{,}00$ м, они сопряжены по полуокружности, трения в системе нет, зазор между стенками и шариками мал. При каких значениях скорости u один шарик вылетит из верхнего колена, а другой — из нижнего? Ускорение свободного падения g.



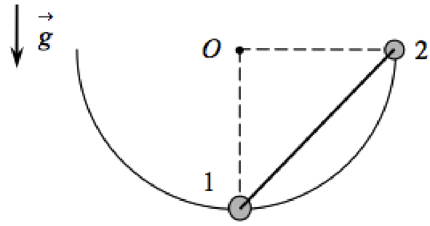
$\sqrt{2g(h-r)} < u < \sqrt{2g(h+r)}$

Задача 34. (*«Росатом», 2019, 11*) На конце невесомого стержня укреплено очень маленькое тело массой m. Второй конец стержня закреплен шарнирно на горизонтальной поверхности. Если расположить стержень под некоторым углом к вертикали, а затем отпустить, он будет падать на поверхность в течение времени t. Какое время будут падать на поверхность стержень, если к его середине прикрепить маленькое тело массы $2m$, расположить под таким же углом к поверхности и отпустить?



$t_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}t$

Задача 35. (*«Курчатов», 2019, 11*) Из тонкой проволоки согнута полуокружность с центром в точке O и радиусом $R = 0{,}5$ м. Полуокружность неподвижно закреплена в вертикальной плоскости. По проволоке могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Отношение масс бусинок $k = m_1/m_2 = 2$. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки 1 и 2 находятся на концах вертикального и горизонтального радиусов. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V бусинки 1 при дальнейшем движении. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



$V = \sqrt{\frac{2gR\left(\sqrt{k^2+1}-k\right)}{k+1}} = 0{,}89$ м/с