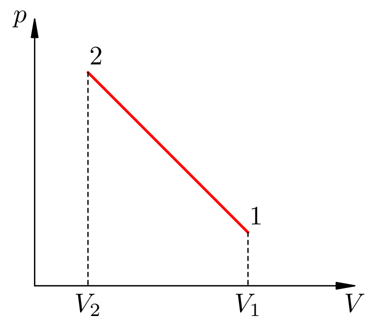
Два способа вычисления теплоемкости газа

На первом туре отборочного этапа олимпиады «Физтех» по физике 2023/24 года у многих 11-классников вызвала трудности задача на вычисление теплоемкости идеального газа.

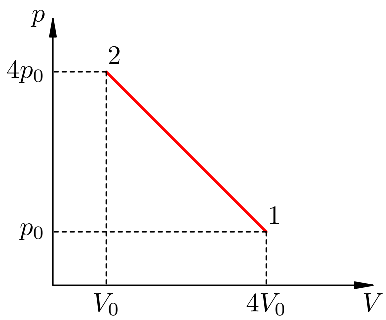
Задача. Гелий сжимают от объема V_1 до объема V_2 в квазистатическом процессе, график зависимости давления от объема представлен на рисунке. Температура газа в состояниях 1 и 2 одинакова. Отношение объема V_1 к объему V_2 равно 4. Найдите молярную теплоемкость гелия в этом процессе вблизи состояния 1.



Не все знают, что такие задачи можно решать двумя способами:

1. непосредственно с помощью первого закона термодинамики;
2. короче и изящнее — через касательную к политропе.

В любом случае нам понадобится уравнение красной прямой, поэтому давайте сразу его получим. Из совпадения температур в состояниях 1 и 2 имеем $p_1V_1 = p_2V_2$. Обозначим $V_1 = 4V_0$ и $V_2 = V_0$; тогда $p_1 = p_0$ и $p_2 = 4p_0$.



Ну и теперь не составляет труда написать уравнение нашей прямой:

$$p = p_0\left(5 - \frac{V}{V_0}\right). \tag{1}$$

Заодно возьмем дифференциалы от обеих частей равенства (1):

$$dp = -\frac{p_0}{V_0}dV. \tag{2}$$

Такова связь изменений давления и объема в нашем процессе.

Переходим к рассмотрению двух обещанных способов решения задачи. Начинаем с «наивного» способа — через первый закон термодинамики.

1 Первый закон термодинамики

Имеем $\delta Q = \delta A + dU$, где, как обычно, $\delta A = pdV$ и $dU = \frac{3}{2}\nu RdT$ (гелий — одноатомный газ!). Кроме того, по определению молярной теплоемкости, $\delta Q = \nu CdT$. Итак, для начала

$$\nu CdT = pdV + \frac{3}{2}\nu RdT. \tag{3}$$

Хорошо бы теперь вместо дифференциала dV организовать тут dT: тогда dT сократится и мы найдем теплоемкость! Чтобы этого добиться, подключим к делу уравнение состояния: $pV = \nu RT$. Возьмем дифференциалы от обеих его частей:

$$pdV + Vdp = \nu RdT.$$

Подставим сюда dp из (2):

$$pdV - V\frac{p_0}{V_0}dV = \nu RdT.$$

Отсюда получаем желаемое:

$$dV = \frac{\nu RdT}{p - \frac{p_0}{V_0}V}.$$

Подставляем это в (3):

$$\nu CdT = p\frac{\nu RdT}{p - \frac{p_0}{V_0}V} + \frac{3}{2}\nu RdT,$$

откуда после сокращения на νdT получим

$$C = R\left(\frac{3}{2} + \frac{p}{p - \frac{p_0}{V_0}V}\right). \tag{4}$$

Таким образом, мы нашли теплоемкость в произвольной точке нашей красной прямой. Нас спрашивали про точку 1, а в ней $p = p_0$ и $V = 4V_0$. Ок, подставляем это в (4):

$$C = R\left(\frac{3}{2} + \frac{p_0}{p_0 - \frac{p_0}{V_0}\cdot 4V_0}\right) = R\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}R.$$

Задача решена.

2 Касание политропы

Напомним, что политропическим процессом называется процесс с постоянной теплоемкостью. Уравнение политропы имеет вид

$$pV^n = \mathrm{const},$$

где показатель политропы

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Чтобы решить задачу, нам нужно найти такую политропу, которая касается в точке 1 нашей красной прямой. В самом деле, представим себе политропу как синюю кривую: если синяя кривая касается красной прямой в точке 1, то вблизи точки 1 маленький красный отрезок почти совпадает с маленькой синей дугой; иными словами, наш красный процесс локально неотличим от политропического. И если мы вычислим показатель n нужной политропы, то тем самым мы и найдем локальную теплоемкость красного процесса в окрестности точки 1.

Ну что ж, приступаем. Политропа проходит через точку 1 с координатами $(4V_0, p_0)$, поэтому уравнение политропы имеет вид

$$pV^n = p_0(4V_0)^n = k,$$

где через k мы для краткости обозначили константу $p_0(4V_0)^n$. Отсюда

$$p = kV^{-n}.$$

Берем производную:

$$\frac{dp}{dV} = -knV^{-n-1}. \tag{5}$$

Поскольку политропа касается красной прямой в точке 1, значение производной (5) в точке $V = 4V_0$ равно угловому коэффициенту $-\frac{p_0}{V_0}$ красной прямой:

$$-kn(4V_0)^{-n-1} = -\frac{p_0}{V_0}.$$

Убираем минусы и подставляем сюда значение k:

$$p_0(4V_0)^n n(4V_0)^{-n-1} = \frac{p_0}{V_0},$$

откуда легко находим $n = 4$.

Ну вот и все. Дальше элементарно:

$$4 = n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{C - \frac{5}{2}R}{C - \frac{3}{2}R},$$

и отсюда после простых вычислений получаем

$$C = \frac{7}{6}R.$$