Равноускоренное движение

Темы кодификатора ЕГЭ: виды механического движения, скорость, ускорение, уравнения прямолинейного равноускоренного движения, свободное падение.

Равноускоренное движение — это движение с постоянным вектором ускорения $\vec{a}$. Таким образом, при равноускоренном движении остаются неизменными направление и абсолютная величина ускорения.

Зависимость скорости от времени

При изучении равномерного прямолинейного движения вопрос зависимости скорости от времени не возникал: скорость была постоянна в процессе движения. Однако при равноускоренном движении скорость меняется с течением времени, и эту зависимость нам предстоит выяснить.

Давайте ещё раз потренируемся в элементарном интегрировании. Исходим из того, что производная вектора скорости есть вектор ускорения:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \tag{1}$$

В нашем случае имеем $\vec{a} = \text{const}$. Что надо продифференцировать, чтобы получить постоянный вектор $\vec{a}$? Разумеется, функцию $\vec{a}t$. Но не только: к ней можно добавить ещё произвольный постоянный вектор $\vec{c}$ (ведь производная постоянного вектора равна нулю). Таким образом,

$$\vec{v} = \vec{c} + \vec{a}t. \tag{2}$$

Каков смысл константы $\vec{c}$? В начальный момент времени $t = 0$ скорость равна своему начальному значению: $\vec{v} = \vec{v}_0$. Поэтому, полагая $t = 0$ в формуле (2), получим:

$$\vec{v}_0 = \vec{c}.$$

Итак, константа $\vec{c}$ — это начальная скорость тела. Теперь соотношение (2) принимает свой окончательный вид:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{3}$$

В конкретных задачах мы выбираем систему координат и переходим к проекциям на координатные оси. Часто хватает двух осей OX и OY прямоугольной декартовой системы координат, и векторная формула (3) даёт два скалярных равенства:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{4}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t. \tag{5}$$

(Формула для третьей компоненты скорости v_z, если она необходима, выглядит аналогично.)

Закон движения

Теперь мы можем найти закон движения, то есть зависимость радиус-вектора от времени. Вспоминаем, что производная радиус-вектора есть скорость тела:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Подставляем сюда выражение для скорости, даваемое формулой (3):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{6}$$

Сейчас нам предстоит проинтегрировать равенство (6). Это несложно. Чтобы получить $\vec{v}_0$, надо продифференцировать функцию $\vec{v}_0 t$. Чтобы получить $\vec{a}t$, нужно продифференцировать $\vec{a}t^2/2$. Не забудем добавить и произвольную константу $\vec{c}$:

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,.$$

Ясно, что $\vec{c}$ — это начальное значение $\vec{r}_0$ радиус-вектора $\vec{r}$ в момент времени $t = 0$. В результате получаем искомый закон равноускоренного движения:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,. \tag{7}$$

Переходя к проекциям на координатные оси, вместо одного векторного равенства (7) получаем три скалярных равенства:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,, \tag{8}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\,, \tag{9}$$

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}\,. \tag{10}$$

Формулы (8)—(10) дают зависимость координат тела от времени и поэтому служат решением основной задачи механики для равноускоренного движения.

Снова вернёмся к закону движения (7). Заметим, что $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}$ — перемещение тела. Тогда получаем зависимость перемещения от времени:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,.$$

Прямолинейное равноускоренное движение

Если равноускоренное движение является прямолинейным, то удобно выбрать координатную ось вдоль прямой, по которой движется тело. Пусть, например, это будет ось OX. Тогда для решения задач нам достаточно будет трёх формул:

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,,$$

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,,$$

где $s_x = x - x_0$ — проекция перемещения на ось OX.

Но очень часто помогает ещё одна формула, являющаяся их следствием. Выразим из первой формулы время:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

и подставим в формулу для перемещения:

$$s_x = v_{0x}\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} + \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2.$$

После алгебраических преобразований (проделайте их обязательно!) придём к соотношению:

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Эта формула не содержит времени t и позволяет быстрее приходить к ответу в тех задачах, где время не фигурирует.

Свободное падение

Важным частным случаем равноускоренного движения является *свободное падение*. Так называется движение тела вблизи поверхности Земли без учёта сопротивления воздуха.

Свободное падение тела, назависимо от его массы, происходит с постоянным *ускорением свободного падения* $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Почти во всех задачах при расчётах полагают $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Давайте разберём несколько задач и посмотрим, как работают выведенные нами формулы для равноускоренного движения.

Задача. Найти скорость приземления дождевой капли, если высота тучи $h = 2$ км.

Решение. Направим ось OY вертикально вниз, расположив начало отсчёта в точке отрыва капли. Воспользуемся формулой

$$s_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y}.$$

Имеем: $s_y = h$, $v_y = v$ — искомая скорость приземления, $v_{0y} = 0$, $a_y = g$. Получаем: $h = \dfrac{v^2}{2g}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Вычисляем: $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2000} = 200\,\text{м/с}$. Это 720 км/ч, порядка скорости пули.

На самом деле капли дождя падают со скоростью порядка нескольких метров в секунду. Почему такое расхождение? Сопротивление воздуха!

Задача. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Найти его скорость через $t = 5$ с.

Решение. Направим ось OY вертикально вверх, поместив начало отсчёта на поверхности Земли. Используем формулу

$$v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Здесь $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, так что $v_y = v_0 - gt$. Вычисляем: $v_y = 30 - 10 \cdot 5 = -20$ м/с. Значит, скорость будет равна 20 м/с. Знак проекции указывает на то, что тело будет лететь вниз.

Задача. С балкона, находящегося на высоте $h = 15$ м, бросили вертикально вверх камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время камень упадёт на землю?

Решение. Направим ось OY вертикально вверх, поместив начало отсчёта на поверхности Земли. Берём формулу

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Имеем: $y = 0$, $y_0 = h$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, так что $0 = h + v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} = 15 + 10t - 5t^2$, или $t^2 - 2t - 3 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $t = 3$ с.

Горизонтальный бросок

Равноускоренное движение не обязательно является прямолинейным. Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально.

Предположим, что тело брошено горизонтально со скоростью v_0 с высоты h. Найдём время и дальность полёта, а также выясним, по какой траектории происходит движение.

Выберем систему координат OXY так, как показано на рис. 1.

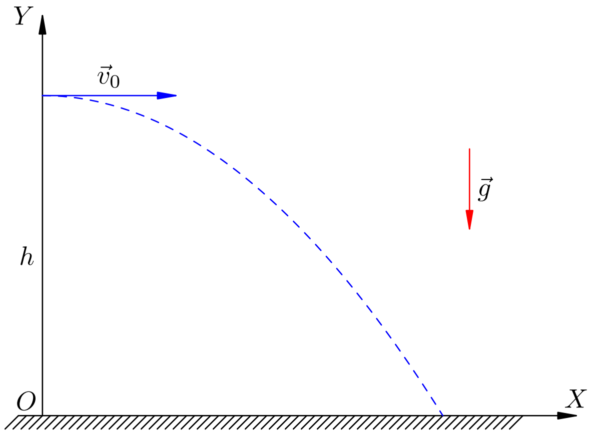

Рис. 1. Горизонтальный бросок

Используем формулы:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В нашем случае $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = 0$, $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$, $a_y = -g$. Получаем:

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{11}$$

Время полёта T найдём из условия, что в момент падения координата тела y обращается в нуль:

$$y(T) = 0 \Rightarrow h - \frac{gT^2}{2} = 0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Дальность полёта L — это значение координаты x в момент времени T:

$$L = x(T) = v_0 T = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Уравнение траектории получим, исключая время из уравнений (11). Выражаем t из первого уравнения и подставляем во второе:

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow$$
$$y = h - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Получили зависимость y от x, которая является уравнением параболы. Следовательно, тело летит по параболе.

Бросок под углом к горизонту

Рассмотрим несколько более сложный случай равноускоренного движения: полёт тела, брошенного под углом к горизонту.

Предположим, что тело брошено с поверхности Земли со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту. Найдём время и дальность полёта, а также выясним, по какой траектории двигается тело.

Выберем систему координат OXY так, как показано на рис. 2.

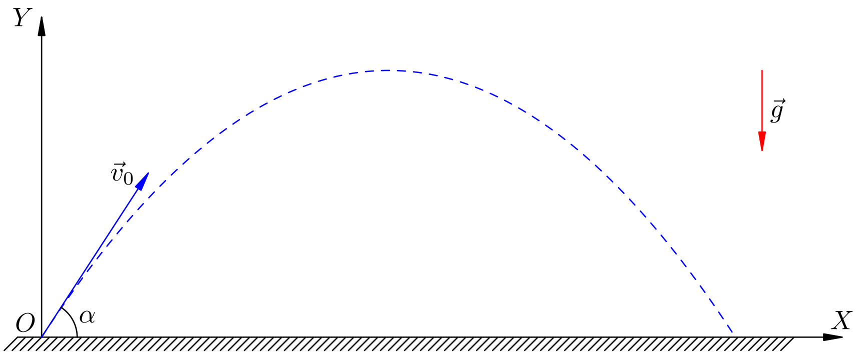

Рис. 2. Бросок под углом к горизонту

Начинаем с уравнений:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В нашем случае $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, $a_x = 0$, $a_y = -g$. Получаем:

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Дальше действуем так же, как и в случае горизонтального броска. В результате приходим к соотношениям:

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

(Обязательно проделайте эти вычисления самостоятельно!) Как видим, зависимость y от x снова является уравнением параболы.

Попробуйте также показать, что максимальная высота подъёма определяется формулой:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$