Переменный ток. 2

Темы кодификатора ЕГЭ: переменный ток, вынужденные электромагнитные колебания, колебательный контур, резонанс.

Давайте начнём с одного математического приёма, чтобы не отвлекаться потом на его объяснение. Это — тригонометрический метод введения вспомогательного угла. Он наверняка вам известен, но всё же повторить его не помешает.

Речь идёт о преобразовании выражения $a\sin\varphi + b\cos\varphi$. Вынесем за скобки «амплитудный множитель» $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\varphi\right).$$

Зачем нужно такое вынесение за скобки? Оказывается, в скобках при синусе и косинусе образовались замечательные множители! Сумма квадратов этих множителей равна единице:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Значит, эти множители являются соответственно косинусом и синусом некоторого угла α:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha. \tag{1}$$

В результате получаем:

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi).$$

Остаётся заметить, что в скобках стоит синус суммы, так что мы приходим к окончательному выражению:

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi+\alpha). \tag{2}$$

При этом для «начальной фазы» α имеем из (1) простую формулу:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Теперь мы готовы рассмотреть вынужденные колебания, происходящие в колебательном контуре с активным сопротивлением. К источнику переменного напряжения U последовательно подключены: резистор сопротивлением R, катушка индуктивности L и конденсатор ёмкости C (рис. 1).

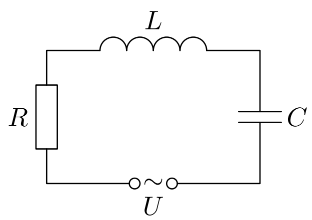

Рис. 1. Колебательный контур с резистором

Так как элементы соединены последовательно, сила тока в них одинакова в любой момент времени (вспомните условие квазистационарности!). Поэтому нам будет удобно начать не с напряжения источника, как раньше, а с силы тока, и считать, что ток в цепи колеблется по закону синуса: $I = I_0 \sin \omega t$.

А теперь вспоминаем материал предыдущего листка.

1. Пусть U_R — мгновенное значение напряжения на резисторе. Оно связано с силой тока обычным законом Ома:
$$U_R = IR = I_0 R \sin \omega t. \tag{4}$$

2. Напряжение на конденсаторе U_C отстаёт по фазе от тока на $\pi/2$; это значит, что фаза напряжения U_C равна $\omega t - \pi/2$. Амплитуда напряжения U_C равна:
$$U_{C0} = I_0 X_C = \frac{I_0}{\omega C}\,.$$
Таким образом,
$$U_C = U_{C0} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t. \tag{5}$$

3. Напряжение на катушке U_L, наоборот, опережает по фазе силу тока на $\pi/2$. Амплитуда:
$$U_{L0} = I_0 X_L = I_0 \omega L.$$
В результате получаем:
$$U_L = U_{L0} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \omega L \cos \omega t. \tag{6}$$

Напряжение источника равно сумме напряжений на резисторе, катушке и конденсаторе:
$$U = U_R + U_L + U_C.$$
Подставляя сюда выражения (4)–(6), получим:
$$U = I_0 R \sin \omega t + I_0 \omega L \cos \omega t - \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = I_0 \left(R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \right). \tag{7}$$

Вот теперь нам и понадобится метод вспомогательного угла. Выражение во внешних скобках имеет для этого подходящий вид: $a \sin \omega t + b \cos \omega t$. Пользуясь выражениями (2) и (3), получим:
$$U = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \sin(\omega t + \alpha), \tag{8}$$
где
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\,. \tag{9}$$

Угол α является сдвигом фаз между напряжением источника и силой тока в цепи: фаза напряжения больше фазы тока на величину α. Амплитуда напряжения:
$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \tag{10}$$

Получив все эти результаты, мы их несколько переиначим и приведём в соответствие с тем, что было в предыдущем листке.

Начнём с напряжения источника. Предположим, как и ранее, что оно меняется по закону синуса:

$$U = U_0 \sin \omega t.$$

Как мы сейчас выяснили, фаза тока меньше фазы напряжения на величину α:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \alpha).$$

При этом амплитуда силы тока находится из формулы (10):

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,. \tag{11}$$

Выражение (11) имеет вид закона Ома:

$$I_0 = \frac{U_0}{X}\,,$$

где

$$X = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,. \tag{12}$$

Величина X — это *полное сопротивление* цепи. Такое сопротивление оказывает наш колебательный контур переменному току.

Закон Ома в данном случае выполнен лишь для *амплитудных* значений тока и напряжения. *Мгновенные* значения $I(t)$ и $U(t)$ уже не будут пропорциональны друг другу — ведь между ними имеется сдвиг фаз, равный α.

Резонанс в колебательном контуре

Как видно из выражения (11), амплитуда силы тока в контуре зависит от частоты колебаний. Построим график этой зависимости — так называемую *резонансную кривую* (рис. 2).

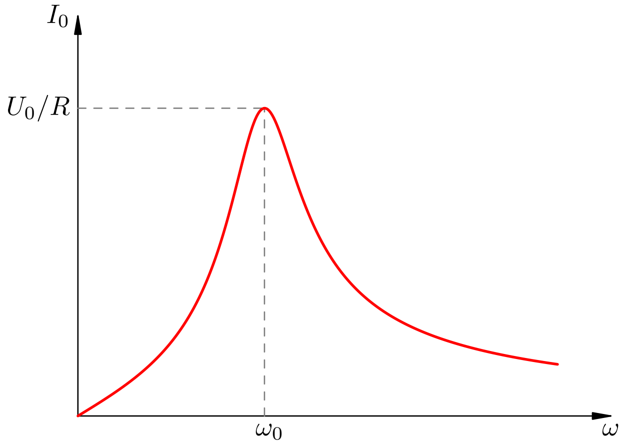

Рис. 2. Резонансная кривая

При $\omega \to 0$ имеем $I_0 \to 0$. Математическая причина стремления тока к нулю — неограниченное возрастание ёмкостного сопротивления $1/(\omega C)$, в результате чего полное сопротивление X также стремится к бесконечности. Физическая причина очевидна: ток малой частоты — это почти постоянный ток, а для постоянного тока конденсатор является разрывом цепи.

При $\omega \to \infty$ опять-таки имеем $I_0 \to 0$: график асимптотически приближается к оси ω. Теперь это происходит за счёт неограниченного роста индуктивного сопротивления ωL. Физическая причина также ясна: при быстром изменении тока в катушке возникает большая ЭДС самоиндукции, препятствующая его увеличению.

При некоторой частоте ω_0 амплитуда силы тока достигает максимума: наступает *резонанс*. Из (11) нетрудно видеть, что величина I_0 принимает максимальное значение

$$I_{0\max} = \frac{U_0}{R}\,, \tag{13}$$

и происходит это при выполнении равенства

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Отсюда находим ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

Это хорошо знакомая нам частота собственных колебаний в контуре с нулевым активным сопротивлением. Она же, как видим, является *резонансной частотой* нашего контура.

Из (13) мы видим, что резонансное значение амплитуды тока $I_{0\max}$ тем больше, чем меньше активное сопротивление R. На рис. 3 представлены три резонансные кривые. Верхняя кривая отвечает достаточно малому сопротивлению R, средняя кривая — большему сопротивлению, нижняя кривая — ещё большему сопротивлению.

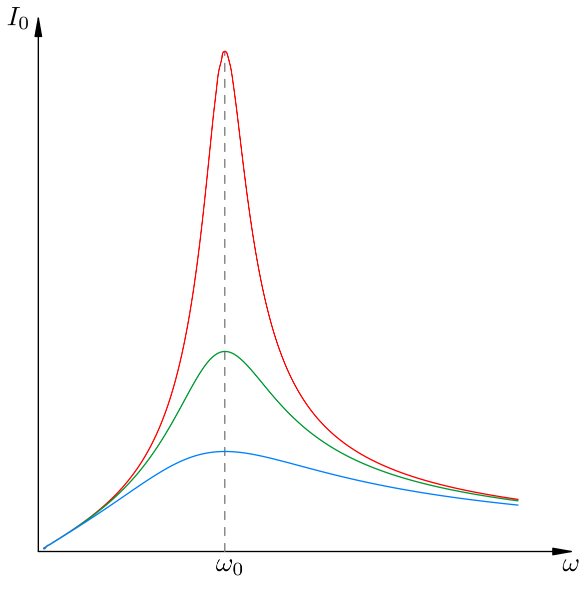

Рис. 3. Резонансные кривые при различных R

Таким образом, резонансный пик тем острее, чем меньше активное сопротивление контура. При весьма большом активном сопротивлении (как это видно из нижней резонансной кривой) понятие резонанса фактически утрачивает смысл.

При резонансе в контуре происходят любопытные вещи.

1. Амплитуды напряжений на конденсаторе и катушке равны друг другу. Действительно:

$$U_{C0} = I_0\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,; \quad U_{L0} = I_0\omega_0 L = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

При малых значениях R эти амплитуды могут значительно превосходить амплитуду U_0 напряжения источника! Это, кстати, является наглядной демонстрацией одного важного факта:

Хотя сумма мгновенных значений напряжения на элементах контура равна мгновенному значению напряжению источника, сумма амплитуд напряжений на отдельных элементах может и не быть равной амплитуде напряжения источника.

2. Равен нулю сдвиг фаз между током в контуре и напряжением источника: $\alpha = 0$. Математически мы это видим из соотношения (9): при $\omega = \omega_0$ получается $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

   Физическую причину синфазности тока и напряжения понять также не сложно. Дело в том, что напряжения U_C и U_L на конденсаторе и катушке колеблются в противофазе (т. е. разность фаз между ними равна π), а их амплитуды при резонансе равны. Стало быть, они отличаются только знаком: $U_L = -U_C$, и в сумме дают нуль. Получается, что $U = U_R + U_L + U_C = U_R$ (словно бы в цепи имелся один только резистор), а колебания напряжения и тока на резисторе происходят синфазно.

Резонанс играет важнейшую роль в радиосвязи. Когда осуществляется приём радиосигнала, радиоволны различных частот возбуждают в контуре колебания. Но амплитуды колебаний будут малы для сигналов тех радиостанций, частоты которых отличаются от собственной частоты контура. Контур выделяет лишь ту радиоволну, частота которой равна его собственной частоте; именно эти колебания будут иметь значительную амплитуду.

Поэтому, когда мы настраиваем приёмник на какую-то радиостанцию, мы меняем собственную частоту контура (как правило, путём изменения ёмкости конденсатора), пока не наступит резонанс с искомой радиоволной.