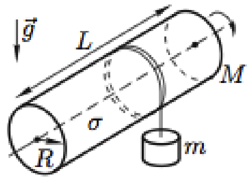
Электромагнитный тормоз

Смотрим красивую задачу 11.2 заключительного этапа Всероссийской олимпиады по физике 2008 года. Авторское решение использует энергетический подход — дифференцирование ЗСЭ; однако в рамках такого подхода никак не проясняется физика процесса (а именно, остается непонятным, почему заряженный цилиндр раскручивается медленнее незаряженного).

Мы будем решать задачу динамически — с помощью уравнения моментов для цилиндра. Наше изложение окажется не таким коротким, как авторское, но зато мы полностью разберемся, что же тут происходит с точки зрения физики!



Задача. (*Всеросс., 2008, ЗЭ, 11.2*) На длинном тонкостенном диэлектрическом цилиндре радиуса R, длины $L \gg R$ и массы M размещён электрический заряд одинаковой поверхностной плотностью σ. Цилиндр может свободно (без трения) вращаться вокруг своей оси под действием груза массы m, подвешенного на невесомой нити, намотанной на цилиндр (рис.). Определите ускорение груза.

Вращение незаряженного цилиндра

Давайте рассмотрим вначале случай незаряженного цилиндра ($\sigma = 0$). Тогда получим простую задачу по механике. Для груза имеем второй закон Ньютона:

$$ma = mg - T, \tag{1}$$

где T — сила натяжения нити. Эта сила T создает вращающий момент TR, который раскручивает цилиндр с угловым ускорением $\dot{\omega}$ (оно равно производной угловой скорости ω по времени, а производная по времени в физике часто обозначается точкой над буквой). Момент инерции цилиндра равен MR^2, так что уравнение моментов для цилиндра принимает вид

$$MR^2\dot{\omega} = TR, \tag{2}$$

или

$$MR\dot{\omega} = T.$$

Теперь заметим, что

$$R\dot{\omega} = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{dv}{dt},$$

где v — линейная скорость точек на поверхности цилиндра, она же — скорость нити и скорость груза. Следовательно, $R\dot{\omega}$ равно ускорению a груза, и тогда имеем

$$Ma = T.$$

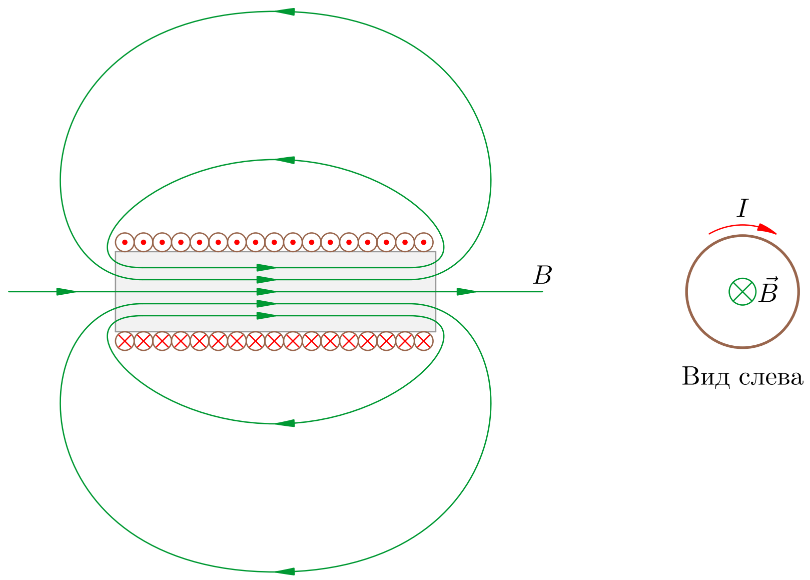
Складывая это с уравнением (1), получим

$$a = \frac{mg}{M + m}. \tag{3}$$

Вращение заряженного цилиндра

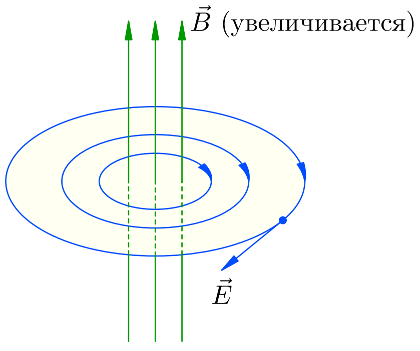
Теперь переходим к нашей задаче с заряженным цилиндром. Какие дополнительные явления тут возникают вдобавок к рассмотренной выше чисто механической ситуации?

Вращение поверхностных зарядов создает поверхностный ток, который, в свою очередь, создает магнитное поле $\vec{B}$, аналогичное полю катушки с током:

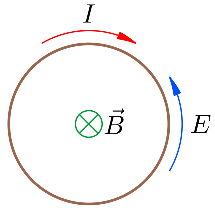


Поскольку цилиндр длинный, магнитное поле внутри цилиндра вдали от краев можно считать однородным, а вне цилиндра у его поверхности вдали от краев — нулевым. Попросту говоря, будем полагать, что магнитное поле сосредоточено целиком внутри цилиндра и что оно там однородно.

Цилиндр вращается с ускорением, поэтому поверхностный ток возрастает, а вслед за ним возрастает и создаваемое им магнитное поле. Ну а возрастающее магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, линии которого бегут по часовой стрелке, если смотреть с конца вектора $\vec{B}$:



А если смотреть в торец цилиндра на рисунке задачи, то дело выглядит так:

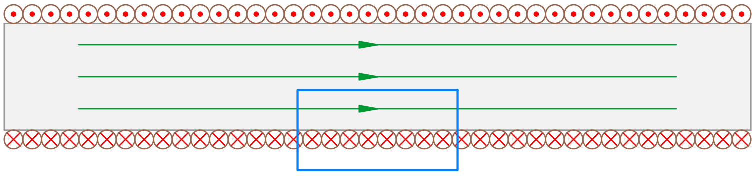


Поле B увеличивается

Цилиндр вращается по часовой стрелке, а вихревое поле E направлено против вращения; значит, сила, действующая на заряды цилиндра со стороны вихревого электрического поля, притормаживает цилиндр. Поэтому искомое ускорение будет меньше, чем ускорение (3) незаряженного цилиндра.

Ну что же, с физикой вроде бы ясность наступила, не так ли? Теперь давайте решать задачу. Пусть ω — мгновенная угловая скорость вращения цилиндра.

Прежде всего найдем магнитное поле внутри цилиндра. Для этого (аналогично ситуации с катушкой) используем теорему о циркуляции. Берем маленький синий контур:



На горизонтальной нижней стороне контура поле равно нулю (ибо вне цилиндра), на вертикальных сторонах — тоже нуль (ибо однородно и горизонтально). Поэтому циркуляция поля B по нашему контуру равна просто Bx. По теореме о циркуляции тогда имеем:

$$Bx = \mu_0 I,$$

где I — ток, пронизывающий наш контур. Этот ток равен отношению заряда, прошедшего через контур за один полный оборот, ко времени оборота:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi Rx}{2\pi/\omega} = \sigma R\omega x.$$

Тогда имеем:

$$Bx = \mu_0 \sigma R\omega x,$$

откуда

$$B = \mu_0 \sigma R\omega.$$

Как видим, поле B возрастает вместе с угловой скоростью и порождает вихревое электрическое поле E. Циркуляция поля E по окружности цилиндра равна производной магнитного потока через поперечное сечение:

$$E \cdot 2\pi R = \dot{\Phi} = \dot{B} \cdot \pi R^2,$$

откуда

$$E = \frac{1}{2}\dot{B}R = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma R^2 \dot{\omega}.$$

Поле E действует на заряд Q всей поверхности цилиндра (в каждой точке поверхности электрическая сила направлена по касательной) и создает тормозящий момент

$$\mathscr{M} = EQR = E(\sigma \cdot 2\pi RL)R = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma R^2 \omega \cdot 2\pi\sigma R^2 L = \mu_0 \pi \sigma^2 R^4 L\dot{\omega}.$$

Для груза имеем второй закон Ньютона без каких-либо изменений:

$$ma = mg - T.$$

А вот уравнение моментов для цилиндра модифицируется:

$$MR^2\dot{\omega} = TR - \mathscr{M} = TR - \mu_0 \pi \sigma^2 R^4 L\dot{\omega}.$$

Отсюда

$$MR\dot{\omega} = T - \mu_0 \pi \sigma^2 R^3 L \dot{\omega}$$

и далее

$$\left(M + \mu_0 \pi \sigma^2 R^2 L\right) R\dot{\omega} = T.$$

Выше мы показали, что $R\dot{\omega} = a$, так что имеем

$$\left(M + \mu_0 \pi \sigma^2 R^2 L\right) a = T.$$

Остается сложить это со вторым законом Ньютона для груза и получить ответ:

$$a = \frac{mg}{M + m + \mu_0 \pi \sigma^2 R^2 L}.$$

Видим, что ускорение будет меньше величины (3) в чисто механической ситуации — за счет тормозящего действия вихревого электрического поля.

Авторское решение

Задача 2. Вращение заряженного цилиндра

При вращении цилиндра возникает круговой ток, создающий магнитное поле внутри цилиндра. Полная сила тока, текущего по поверхности цилиндра, равна $I = \sigma v L$, где v — линейная скорость зарядов. Ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, $i = I/L = \sigma v$. Магнитное поле B внутри цилиндра совпадает с магнитным полем длинной катушки:

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_0 I}{L} = \mu_0 \sigma v.$$

Плотность магнитной энергии $w_{\mathrm{M}} = B^2/(2\mu_0) = \mu_0\sigma^2 v^2/2$. Полная энергия магнитного поля $W_{\mathrm{M}} = w_{\mathrm{M}} \cdot \pi R^2 L = kv^2/2$, где $k = \pi\mu_0\sigma^2 R^2 L$.

Кинетическая энергия вращающегося цилиндра и груза $W_{\mathrm{K}} = (m+M)v^2/2$.

Если координатную ось x направить вниз, то потенциальная энергия груза запишется в виде $W_{\Pi} = -mgx + \mathrm{const}$.

Запишем теперь закон сохранения энергии, включая механическую энергию вращающегося цилиндра и груза и энергию магнитного поля внутри цилиндра:

$$W_{\mathrm{K}} + W_{\Pi} + W_{\mathrm{M}} = \mathrm{const} \qquad \text{или} \qquad \big(m + M + k\big)\frac{v^2}{2} - mgx = \mathrm{const}\,.$$

Принимая во внимание, что $v = \dfrac{dx}{dt}$ и $a = \dfrac{dv}{dt}$, получим, продифференцировав это уравнение по времени:

$$a = \frac{mg}{m + M + k} = \frac{mg}{m + M + \pi\mu_0\sigma^2 R^2 L}.$$