Максимизация средней скорости

Рассматриваем задачу, которая предлагалась девятиклассникам на заключительном этапе Всероссийской олимпиады по физике в 2005 году. Покажем другой способ ее решения, альтернативный официальному авторскому.

Задача. (*Всеросс., 2005, ЗЭ, 9.2*) Поезд метро проходит расстояние S между станциями, разгоняясь с ускорением a до середины перегона и тормозя с таким же по модулю ускорением на второй половине пути. В какой момент времени τ от начала движения средняя скорость $\bar{u}$ поезда на пройденном участке пути максимальна? Найдите это максимальное значение $\bar{u}_{\max}$ и расстояние ℓ от начала пути, на котором оно достигается.

Идея авторского решения: пусть точка пробегает график зависимости *координаты* от времени; следим за прямой, соединяющей нашу точку с началом координат, и максимизируем угловой коэффициент этой прямой (который как раз и является средней скоростью).

Ну а мы работаем с графиком зависимости *скорости* от времени и будем максимизировать отношение текущей площади под графиком (то есть пройденного пути) ко времени. Используем неравенство Коши!

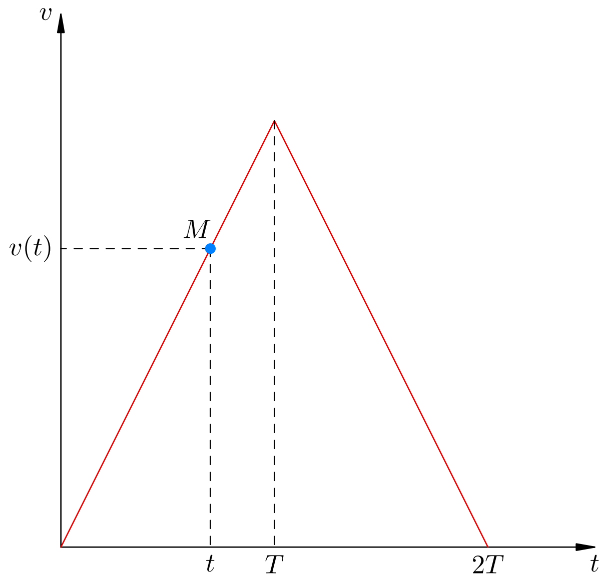
Решение. Пусть $2T$ — время прохождения расстояния S. Тогда T есть время разгона и время торможения. Имеем:

$$\frac{S}{2} = \frac{aT^2}{2},$$

откуда

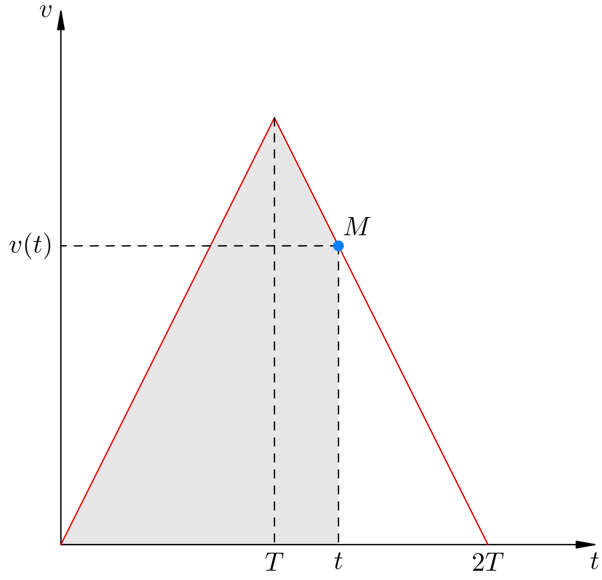
$$T = \sqrt{\frac{S}{a}}.$$

График $v(t)$ имеет вид равнобедренного треугольника:



Уравнение левой стороны графика: $v = at$. Уравнение правой стороны: $v = a(2T - t)$.

Пусть синяя точка M пробегает наш график. Когда она находится на левой стороне, пройденный путь равен $at^2/2$, и средняя скорость тогда равна $at/2$. Видим, что средняя скорость растет со временем; отсюда ясно, что средняя скорость достигает максимума, когда точка M находится на правой стороне графика.



Теперь путь, пройденный за время t, есть серая площадь (обозначим ее Area). Она равна разности площади S равнобедренного треугольника и белой площади:

$$\text{Area} = S - \frac{1}{2} \cdot v(t) \cdot (2T - t) = S - \frac{1}{2} \cdot a(2T - t)^2 = aT^2 - \frac{a}{2}\left(4T^2 - 4Tt + t^2\right) = a\left(2Tt - \frac{t^2}{2} - T^2\right).$$

Тогда средняя скорость

$$\bar{u} = \frac{\text{Area}}{t} = a\left(2T - \left(\frac{t}{2} + \frac{T^2}{t}\right)\right).$$

Для максимизации $\bar{u}$ нам нужно минимизировать выражение $\frac{t}{2} + \frac{T^2}{t}$, а для этого отлично подходит неравенство Коши[1]:

$$\frac{t}{2} + \frac{T^2}{t} \geqslant 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{T^2}{t}} = T\sqrt{2}.$$

Равенство достигается при $\frac{t}{2} = \frac{T^2}{t}$, то есть в момент времени

$$\tau = T\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2S}{a}}.$$

Максимальная средняя скорость:

$$\bar{u}_{\max} = a\left(2T - T\sqrt{2}\right) = \sqrt{aS}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Соответствующий путь:

$$\ell = \bar{u}_{\max}\tau = S\sqrt{2}\left(2 - \sqrt{2}\right) = 2S\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Задача решена.

[1]Более подробно данный подход с неравенством Коши обсуждается в статье «Максимизация мощности на резисторе» (третий способ решения).

Авторское решение

Задача 2. Средняя скорость поезда

График зависимости координаты x поезда от времени t представлен на рис. 10. Средняя скорость $\bar{u}(t)$ на участке пути, пройденном к моменту времени t, равна угловому коэффициенту $k(t) = x(t)/t$ прямой, проходящей через точку $(t; x(t))$ и начало координат. Из графика видно, что $\bar{u}_{\max}$ соответствует прямой, касающейся кривой $x(t)$ в точке $(\tau; l)$.

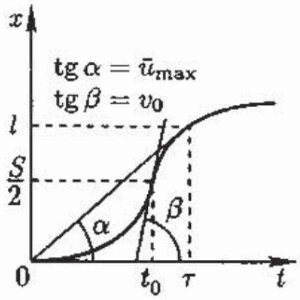


Рис. 10

Поезд проходит расстояние $S/2$ от станции отправления за время $t_0 = \sqrt{S/a}$. Зависимость $x(t)$ для $t > t_0$ имеет вид:

$$x(t) = \frac{S}{2} + at_0(t - t_0) - \frac{a}{2}(t - t_0)^2. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$x(\tau) = \bar{u}_{\max}\tau. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\frac{1}{2}a\tau^2 + (\bar{u}_{\max} - 2at_0)\tau + \frac{3}{2}at_0^2 - \frac{S}{2} = 0. \tag{3}$$

Поскольку при $t = \tau$ прямая $x = \bar{u}_{\max}t$ касается графика квадратичной функции $x(t)$, дискриминант (3) должен быть равен нулю:

$$(\bar{u}_{\max} - 2at_0)^2 - 3a^2t_0^2 + aS = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \bar{u}_{\max} = \sqrt{aS}(2 \pm \sqrt{2}).$$

В последней формуле следует оставить только знак «$-$», поскольку $\bar{u}_{\max}$ не может превышать максимальной за все время движения скорости поезда $v_0 = at_0 = \sqrt{aS}$. Подставив $\bar{u}_{\max}$ в (3), найдем $\tau = \sqrt{2S/a}$. Искомое расстояние $l = \bar{u}_{\max}\tau = 2S(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}83S$.