Комплексные числа и переменный ток

Комплексные числа — мощный инструмент математики и физики. В данной статье нас интересуют главным образом физические приложения комплексных чисел, а именно — расчёт цепей переменного тока.

В первом разделе («Математика») мы вкратце опишем алгебраические операции над комплексными числами, понятия модуля и аргумента комплексного числа, а также тригонометрическую и показательную форму комплексных чисел.

Во втором разделе («Физика. Переменный ток») мы рассмотрим комплексные сопротивления резистора, конденсатора и катушки, найдём ток в последовательной RCL-цепи и разберём пару задач — из задачника Савченко и с заключительного этапа Всеросса.

1 Математика

Мы не претендуем тут на строгое и исчерпывающее изложение теории. Для более подробного и глубокого ознакомления смотрите, например, задание ЗФТШ.

1.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Напомним, что *мнимая единица* — это такое комплексное число i, для которого $i^2 = -1$. Любое комплексное число z может быть записано в виде

$$z = a + bi,$$

где a и b — действительные числа. Данная запись называется *алгебраической формой* комплексного числа z. При этом число a называется *вещественной частью*, а число b — *мнимой частью* числа z. Обозначение: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Комплексно-сопряжённым к числу z называется число $\bar{z} = a - bi$.

1.2 Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел

Складываем и вычитаем комплексные числа «покомпонентно» (как векторы), то есть производим эти операции по отдельности над действительными и мнимыми частями:

$$(2 + 5i) + (4 - 7i) = (2 + 4) + (5i - 7i) = 6 - 2i,$$
$$(2 + 5i) - (4 - 7i) = (2 - 4) + (5i - (-7i)) = -2 + 12i.$$

Как происходит умножение комплексных чисел, ясно из примера:

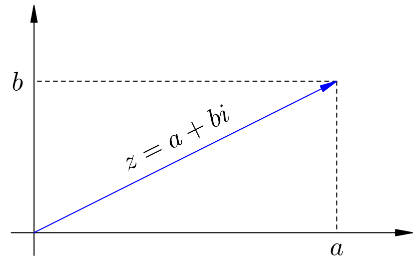
$$(1 + 2i)\,(3 - 4i) = 3 + 6i - 4i - 8i^2 = 3 + 2i + 8 = 11 + 2i.$$

При делении комплексных чисел умножаем предварительно на сопряжённое к знаменателю:

$$\frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{11 + 2i}{3^2 - (4i)^2} = \frac{11 + 2i}{25}.$$

1.3 Геометрическая интерпретация комплексного числа

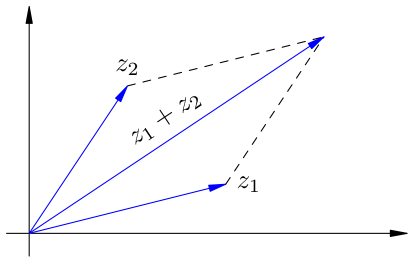
Выше мы не случайно упомянули векторы. Комплексное число $z = a + bi$ — это просто вектор с координатами (a, b) на *комплексной плоскости*:



Комплексные числа складываются как векторы — покоординатно:

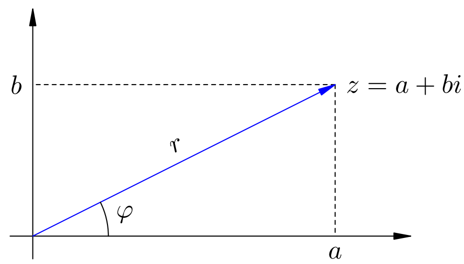
$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

ну а на комплексной плоскости сложение осуществляется по правилу параллелограмма:



1.4 Модуль и аргумент комплексного числа

Задать точку на координатной плоскости можно не только декартовыми координатами (a, b), но и полярными координатами (r, φ). Полярные координаты приводят нас к понятиям модуля и аргумента комплексного числа.



Модуль комплексного числа $z = a + bi$ — это длина вектора z на комплексной плоскости:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргумент $\arg z$ комплексного числа z — это угол φ между вектором z и положительным направлением оси абсцисс. Ясно, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

1.5 Тригонометрическая форма комплексного числа

Декартовы координаты очевидным образом выражаются через полярные:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Тогда имеем:

$$z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Мы получили *тригонометрическую форму* комплексного числа z:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

1.6 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть даны комплексные числа z_1 и z_2. Запишем их в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Перемножаем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\right) = \\ = r_1 r_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\big),$$

то есть

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\big).$$

Мы видим, что *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются*:

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|,$$
$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Теперь делим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \\ = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\big),$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\big).$$

Видим, что *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются*:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

1.7 Формула Эйлера

Формула Эйлера вводит в математику и физику комплексную экспоненту:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Если вы знаете разложения функций e^x, $\cos x$ и $\sin x$ в ряды по степеням x, то можете сами легко проверить это равенство. Заметим, кстати, что $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$.

1.8 Показательная форма комплексного числа

С помощью формулы Эйлера мы получаем еще одну форму представления комплексных чисел, которая особенно важна в физике. Именно, запишем число z в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

и заменим выражение в скобках по формуле Эйлера. Получим

$$z = re^{i\varphi}.$$

Это — *показательная форма* комплексного числа.

Умножение и деление комплексных чисел в показательной форме выглядит совершенно естественно:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

2 Физика. Переменный ток

Комплексные числа служат естественным инструментом описания гармонических колебаний и, в частности, переменного тока.

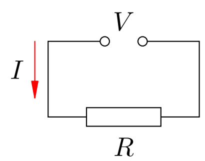
Пусть имеется источник переменного напряжения $U = U_0\cos\omega t$. Будем подключать к нему поочерёдно *двухполюсники*: резистор, конденсатор и катушку. Оказывается, что если ввести в дело *комплексное напряжение*

$$V = U_0 e^{i\omega t},$$

(так что $U = \operatorname{Re} V$), то закон Ома продолжит работать в области комплексных величин: а именно, комплексный ток будет пропорционален комплексному напряжению! Поэтому каждому подключаемому двухполюснику можно сопоставить соответствующее *комплексное сопротивление*, называемое также *импедансом*. Вычислим импедансы резистора, конденсатора и катушки.

2.1 Импеданс резистора

Итак, подключаем к нашему источнику комплексного напряжения резистор R.



Тут всё просто: обычный (вещественный) ток равен $U_0\cos\omega t/R$ и является вещественной частью комплексного тока

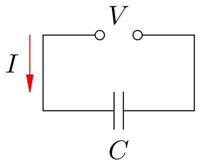
$$I = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{R} = \frac{V}{R}.$$

Поэтому импеданс резистора совпадает с его обычным сопротивлением:

$$Z_R = R.$$

2.2 Импеданс конденсатора

Теперь подключаем конденсатор ёмкостью C.



Для комплексного заряда конденсатора имеем:

$$q = CV = CU_0 e^{i\omega t}.$$

Дифференцируя заряд по времени, находим комплексный ток:

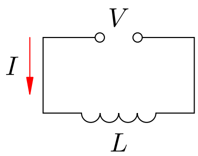
$$I = \dot{q} = CU_0 i\omega e^{i\omega t} = \frac{U_0}{1/(i\omega C)} e^{i\omega t}.$$

Отсюда импеданс конденсатора:

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

2.3 Импеданс катушки

Теперь подключаем катушку индуктивностью L.



По правилу Кирхгофа

$$V - L\dot{I} = 0,$$

откуда

$$\dot{I} = \frac{V}{L} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{L}.$$

Интегрируем по времени:

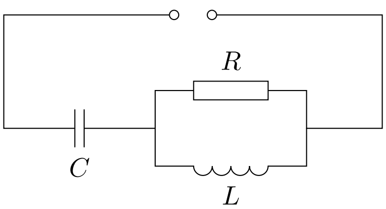
$$I = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t}.$$

Отсюда импеданс катушки:

$$Z_L = i\omega L.$$

2.4 Соединения двухполюсников

Замечательно, что *импедансы складываются по обычным правилам последовательного и параллельного соединений*! Рассмотрим, например, такую цепь:

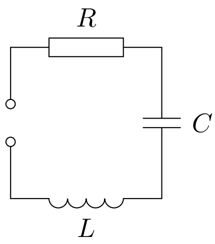


Импеданс данной цепи равен

$$Z = Z_C + \frac{1}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}}.$$

2.5 Последовательная *RCL*-цепь

Теперь подключим все три наших двухполюсника последовательно:



Решим стандартную задачу: найти ток в этой цепи, если на вход подано переменное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$.

Будем считать, что подано комплексное напряжение $V = U_0 e^{i\omega t}$. План такой: вычисляем импеданс цепи, находим комплексный ток, а потом от комплекного тока берём вещественную часть.

Импеданс цепи:

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Запишем импеданс в показательной форме:

$$Z = |Z|e^{i\varphi},$$

где

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Тогда комплексный ток

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z|\, e^{i\varphi}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Теперь берём Re и находим искомый вещественный ток (который обозначаем той же буквой I):

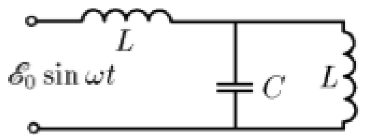
$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \varphi\right).$$

Величина φ, тангенс которой мы нашли, называется *сдвигом фаз между током и напряжением.*

2.6 Ещё пара задач

Изложенная техника позволяет легко разбираться с довольно непростыми задачами — вплоть до заключительного этапа Всеросса.

Задача 1. (*Савченко, 11.4.14*) Найдите установившийся ток в цепи, изображённой на рисунке.



Решение. Работаем с комплексным напряжением источника $V = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$. Тогда исходное вещественное напряжение $\mathscr{E}_0 \sin \omega t = \operatorname{Im} V$. Следовательно, от найденного комплексного тока нам надо будет брать мнимую часть.

Импеданс цепи:

$$Z = i\omega L + \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} + i\omega C} = i\omega L + \frac{1}{i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = i\omega L - \frac{i}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} =$$
$$= i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}\right) = i\left(\omega L - \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}\right) = i\omega L\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC - 1}\right) = i\omega L\,\frac{\omega^2 LC - 2}{\omega^2 LC - 1}.$$

Комплексный ток:

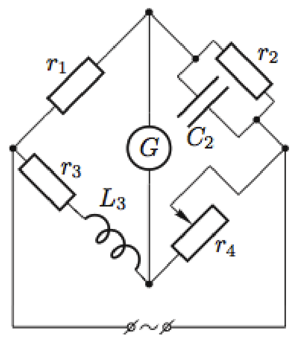
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{\mathscr{E}_0 e^{i\omega t}}{i\omega L \cdot \frac{\omega^2 LC - 2}{\omega^2 LC - 1}} = \frac{\mathscr{E}_0\left(\omega^2 LC - 1\right)}{\omega L\left(\omega^2 LC - 2\right)}(-i)e^{i\omega t} = \frac{\mathscr{E}_0\left(\omega^2 LC - 1\right)}{\omega L\left(\omega^2 LC - 2\right)}(-i)(\cos\omega t + i\sin\omega t) =$$
$$= \frac{\mathscr{E}_0\left(\omega^2 LC - 1\right)}{\omega L\left(\omega^2 LC - 2\right)}(\sin\omega t - i\cos\omega t).$$

Остаётся взять мнимую часть от полученной комплексной величины:

$$I = \frac{\mathscr{E}_0\left(\omega^2 LC - 1\right)}{\omega L\left(\omega^2 LC - 2\right)}(-\cos\omega t) = \frac{\mathscr{E}_0\left(\omega^2 LC - 1\right)}{\omega L\left(2 - \omega^2 LC\right)}\cos\omega t.$$

Ответ. $I = \frac{\mathscr{E}_0\left(\omega^2 LC - 1\right)}{\omega L(2 - \omega^2 LC)}\cos\omega t$.

Задача 2. (*Всеросс., 2006, ЗЭ, 11*) Для определения ёмкости C_2 и сопротивления утечки r_2 конденсатора собрана мостовая схема (рис.), которая сбалансирована при подключении гармонического переменного напряжения. Оказалось, что баланс моста не нарушается при любом изменении частоты напряжения. Чему равны параметры C_2 и r_2, если известно, что $r_1 = 2500$ Ом, $r_3 = 10$ Ом, $L_3 = 1$ Гн, $r_4 = 800$ Ом? Гальванометр измеряет действующее значение силы тока.



Решение. Поскольку мост сбалансирован, имеем:

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{Z_4}{Z_2},$$

или

$$\frac{r_3 + i\omega L_3}{r_1} = r_4 \left(\frac{1}{r_2} + i\omega C_2 \right).$$

Это просто равенство комплексных чисел, записанных в алгебраической форме:

$$\frac{r_3}{r_1} + i\,\frac{\omega L_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2} + i r_4 \omega C_2.$$

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда совпадают их действительные и мнимые части:

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2}, \quad \frac{\omega L_3}{r_1} = r_4 \omega C_2.$$

Отсюда немедленно получаем ответ.

Ответ. $r_2 = \frac{r_1 r_4}{r_3} = 200$ кОм; $C_2 = \frac{L_3}{r_1 r_4} = 0{,}5$ мкФ.

Авторское решение не использует комплексных чисел и потому несколько длиннее. Что ж, почувствуйте разницу :-)

Условие балансировки моста имеет вид:

$$\frac{r_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{r_4}, \tag{10}$$

где $$Z_3 = \sqrt{r_3^2 + (L_3\omega)^2}, \qquad \frac{1}{Z_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + (C_2\omega)^2}, \tag{11}$$

ω — круговая частота переменного тока. Подставляя (11) в (10), после арифметических преобразований получим:

$$\left(\frac{r_1 r_4}{r_2}\right)^2 - r_3^2 = \omega^2 \left(L_3^2 - (C_2 r_1 r_4)^2\right). \tag{12}$$

По условию равенство (12) справедливо при любой частоте ω. Следовательно, (12) эквивалентно системе уравнений:

$$\left(\frac{r_1 r_4}{r_2}\right)^2 - r_3^2 = 0, \qquad L_3^2 - (C_2 r_1 r_4)^2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$r_2 = \frac{r_1 r_4}{r_3} = 200 \text{ кОм}, \qquad C_2 = \frac{L_3}{r_1 r_4} = 0{,}5 \text{ мкФ}.$$