Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, финал, 2017/18 год

Первый день

1. Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа a_1, a_2, $\ldots$ простые.

2. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

3. Пусть a_1, $\ldots$, a_{25} — целые неотрицательные числа, а k — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}\,] + [\sqrt{a_2}\,] + \ldots + [\sqrt{a_{25}}\,] \geqslant \left[\sqrt{a_1 + \ldots + a_{25} + 200k}\,\right].$$

(Как обычно, через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

4. На клетчатой доске $n \times n$ отметили несколько клеток таким образом, что левый нижний (L) и правый верхний (R) углы доски не отмечены, и любой путь коня из L в R обязательно содержит отмеченную клетку. При каких $n > 3$ можно заведомо утверждать, что найдутся три клетки, идущие подряд по диагонали, среди которых отмечено хотя бы две?

Второй день

5. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать?

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

7. В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причём каждая карта бьёт меньшую, за одним исключением: 1 бьёт 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьёт. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.