Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, финал, 2017/18 год

Первый день

1. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

2. Даны положительные числа x_1, x_2, …, x_n, где $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n}+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geqslant n.$$

3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.

Второй день

5. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает её со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от неё по часовой стрелке k-ю не снятую со стола карточку и тоже снимает её. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

6. Три диагонали правильной n-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке O. Докажите, что точка O — центр призмы. (Диагональ призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.)

7. Определим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ формулой $a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}}\right]$. Докажите, что существует такое натуральное число N, что среди любых N подряд идущих членов последовательности есть такой, десятичная запись которого содержит цифру 5. (Как обычно, через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.)

8. Изначально в левом нижнем и правом нижнем углах доски 2018×2018 стоят два *скакуна* — красный и синий соответственно. Коля и Саша ходят по очереди; начинает Коля. За ход игрок перемещает своего скакуна (Коля — красного, а Саша — синего), сдвигая его одновременно на 20 клеток по одной из координат и на 17 по другой; при этом скакун не может вставать на клетку, занятую другим скакуном. Запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них красный скакун стоит на одном и том же поле, и синий — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?