Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, финал, 2017/18 год

Первый день

1. Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x+1| + \ldots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

2. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

4. Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдётся натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

Второй день

5. В таблицу 10×10 записаны положительные числа так, что в любой строке числа образуют арифметическую прогрессию (в порядке следования слева направо), а в любом столбце — геометрическую прогрессию (в порядке следования сверху вниз). Докажите, что знаменатели всех этих геометрических прогрессий равны.

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

8. Доска для игры состоит из левой и правой частей. В каждой части есть несколько полей; между ними проведено несколько отрезков, каждый соединяет два поля из разных частей. При этом с любого поля можно по отрезкам добраться до любого другого. Изначально на одном поле левой части стоит лиловая фишка, а на одном поле правой — пурпурная. Лёша и Паша ходят по очереди; начинает Паша. За ход игрок перемещает свою фишку (Лёша — лиловую, а Паша — пурпурную) по отрезку на поле, на котором нет другой фишки. При этом запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них лиловая фишка стоит на одном и том же поле, и пурпурная — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Существуют ли доска и начальное расположение фишек, при которых у Паши есть выигрышная стратегия?