Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, муниципальный этап, 2017/18 год

1. 33 богатыря выходят в дозор 33 дня. В первый день должен выйти один богатырь, во второй — два, в третий — три, и так далее, в последний день — все богатыри. Сможет ли дядька Черномор организовать дозоры так, чтобы все богатыри вышли в дозор одинаковое количество раз?

2. Существуют ли такие попарно различные числа a, b и c, что число a является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 2bx + c^2$, число b является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 2cx + a^2$, а число c является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 2ax + b^2$?

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Оказалось, что радиусы OA и OB первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку A проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках M и N. Докажите, что $MB \perp NB$.

4. Выписаны все делители некоторого натурального числа, кроме единицы и его самого. Какие-то два числа из этого списка отличаются в шесть раз. А во сколько раз отличаются два самых больших числа из этого списка?

В полтора раза

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки CX и AY пересекаются в точке T. Докажите, что площадь треугольника XBY больше площади треугольника XTY.

6. Есть две коробки, в одной 2017 конфет, а в другой 2018. Играют двое, ходят по очереди. За один ход каждый может съесть любое количество конфет, отличное от нуля, из любой коробки. Правила игры не допускают, чтобы после какого-то хода число конфет в одной из коробок делилось на число конфет в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, не нарушив этого условия. Кто сможет выиграть: начинающий игру или второй игрок, как бы ни играл его соперник?