Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, финал, 2016/17 год

Первый день

1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω проходит через вершины B и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

3. Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, ..., 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъёмностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег?

4. Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность a_1, a_2, a_3, ... натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности?

Второй день

5. На доске написаны $n > 3$ различных натуральных чисел, меньших, чем

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1).$$

Для каждой пары этих чисел Серёжа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он бы получил $100 = 14 \cdot 7 + 2$ и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных.

6. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3?

7. Неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 60^\circ$, вписан в окружность Ω. На биссектрисе угла BAC выбрана точка A', а на биссектрисе угла ABC — точка B' так, что $AB' \parallel BC$ и $BA' \parallel AC$. Прямая $A'B'$ пересекает Ω в точках D и E. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

8. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке.