# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## 10 класс, финал, 2016/17 год

**Первый день**

**1.** На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые $\ell_1$ и $\ell_2$. Известно, что отрезки, высекаемые графиками на $\ell_1$, равны, и отрезки, высекаемые графиками на $\ell_2$, также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают.

**2.** Остроугольный равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке $O$. Лучи $BO$ и $CO$ пересекают стороны $AC$ и $AB$ в точках $B'$ и $C'$ соответственно. Через точку $C'$ проведена прямая $\ell$, параллельная прямой $AC$. Докажите, что прямая $\ell$ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.

**3.** Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своём первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

**4.** На доске выписаны в ряд $n$ положительных чисел $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом $a_i$ число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$.

**Второй день**

**5.** На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа $n$, увеличенные на 1. Найдите все такие числа $n$, для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа $m$. (*Собственными делителями* натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от $a$ и от 1.)

**6.** Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а $a$, $b$ и $c$ — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.

**7.** Каждая клетка доски $100 \times 100$ окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата $2 \times 2$. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат $2 \times 2$, клетки которого окрашены в шахматном порядке.

**8.** Неравнобедренный треугольник $ABC$ вписан в окружность с центром $O$ и описан около окружности с центром $I$. Точка $B'$, симметричная точке $B$ относительно прямой $OI$, лежит внутри угла $ABI$. Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведённые в точках $B'$ и $I$, пересекаются на прямой $AC$.