Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2016/17 год

Первый день

1. В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз?

2. Окружность с центром I вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на описанной окружности ω треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω.

3. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) — a_2 камней, ..., наконец, в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя — за меньшее ненулевое число ходов?

4. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

Второй день

5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

6. Изначально на доске записаны несколько натуральных чисел (больше одного). Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2+2^2+2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

7. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $DE \parallel AC$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.