Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, финал, 2015/16 год

Первый день

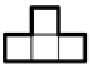
1. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.)

Обманывает

2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

3. Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N?

$N = 3$

4. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырёхклеточную фигурку вида  — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)

Второй день

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

$\boxed{8}$

6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

7. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

8. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\,.$$