Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, финал, 2015/16 год

Первый день

1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

2. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

3. На клетчатый лист бумаги размера 100×100 положили несколько попарно неперекрывающихся картонных равнобедренных прямоугольных треугольничков с катетом 1; каждый треугольничек занимает ровно половину одной из клеток. Оказалось, что каждый единичный отрезок сетки (включая граничные) накрыт ровно одним катетом треугольничка. Найдите наибольшее возможное число клеток, не содержащих ни одного треугольничка.

4. В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями $x \pm y \pm z = n$ (при всех целых n). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) с рациональными координатами не лежит ни в одной проведённой плоскости. Докажите, что найдётся натуральное k, при котором точка (kx_0, ky_0, kz_0) лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения.

Второй день

5. Пусть n — натуральное число. На $2n + 1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \ldots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел *целых* корней. Обязательно ли это можно сделать?

6. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016.

7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3 b^3 c^3 d^3}\,.$$

8. В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку.