Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, финал, 2015/16 год

Первый день

1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

Нет

2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.

3. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

4. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.

Второй день

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

$\boxed{8}$

6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырёх написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?

Да

8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.