Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, муниципальный этап, 2015/16 год

1. В клетках квадрата 3×3 записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (Например, из клетки с буквой a конь может пойти в клетки с буквами f и h, а король — в клетки с буквами b, d и e.)

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Да

2. Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая 1 и само число)?

3

3. В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O — центр описанной окружности треугольника MKN).

4. Даны три квадратных трёхчлена: $x^2 + b_1x + c_1$, $x^2 + b_2x + c_2$ и $x^2 + \frac{b_1+b_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трёхчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

5. В турнире участвовали 50 шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна 61 партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?

Нет

6. Через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.