

Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, финал, 2014/15 год

Первый день

1. Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

0

2. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω , описанной около треугольника ABC , так, что касательные к ω в этих точках проходят через D . Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC .

09

3. Натуральные числа a , x и y , большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x ?

2

4. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

Второй день

5. По кругу записаны 100 целых чисел. Каждое из чисел больше суммы двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди записанных?

67

6. Поле представляет собой клетчатый квадрат 41×41 , в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет — остаётся на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно обойтись для того, чтобы гарантировать, что танк уничтожен?

$$\frac{3 \cdot 41^2}{2} - 1 = 2521$$

7. Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω . Пусть M — точка пересечения его медиан, а AN — высота этого треугольника. Луч MN пересекает Ω в точке A' . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'NB$, касается AB .

8. На доске написаны $N \geq 9$ различных неотрицательных чисел, меньших единицы. Оказалось, что для любых восьми различных чисел с доски на ней найдётся девятое, отличное от них, такое, что сумма этих девяти чисел целая. При каких N это возможно?

$$6 = N \text{ или около}$$