

Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, финал, 2014/15 год

Первый день

1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω , описанной около треугольника ABC , так, что касательные к ω в этих точках проходят через D ; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол ABC .

◻09

3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A — лучший из трёх, а B — худший, другой — что B лучший, а C худший, а третий — что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.

4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k . Натуральное число a назовём *n -хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального n существует натуральное число, являющееся n -хорошим, но не являющееся $(n+1)$ -хорошим?

◻17

Второй день

5. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.

6. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k + 1$?

лэН

7. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены медиана AM и высота $АН$. На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Окружность, описанная около треугольника PMQ , пересекает прямую BC вторично в точке X . Докажите, что $BH = CX$.

8. У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых — разные, причём любая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

02