Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2014/15 год

Первый день

1. Целые числа a, x_1, x_2, $\ldots$, x_{13} таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2 \ldots x_{13} = 0$.

2. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

33

3. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right).$$

Второй день

5. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство

$$f\left(a^2+b^2\right) \geqslant f(2ab).$$

Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

6. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

$\boxed{\text{Да}}$

7. По кругу расставлено 300 положительных чисел. Могло ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме одного, равно разности своих соседей?

$\boxed{\text{Нет}}$

8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

$\boxed{5^{100} - 3^{100}}$