Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2014/15 год

Первый день

1. Целые числа a, x_1, x_2, $\ldots$, x_{13} таковы, что

$$a = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2\ldots x_{13} = 0$.

2. На плоскости отметили все вершины правильного n-угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n-угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n-угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках P и Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ, касается стороны BC.

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab+bc+ca=1$. Докажите, что

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geqslant 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

Второй день

5. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?

6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

7. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

8. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?