Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, финал, 2013/14 год

Первый день

1. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

2. Серёжа выбрал два различных натуральных числа a и b. Он записал в тетрадь четыре числа: a, $a+2$, b и $b+2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске?

3. В выпуклом n-угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей.

4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Отрезки BP и AC пересекаются в точке S. Пусть AD — высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90°$.

Второй день

5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

8. В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)