Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, финал, 2013/14 год

Первый день

1. Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?

2. Дана функция f, определённая на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения. Известно, что для любых x и y таких, что $x > y$, верно неравенство $(f(x))^2 \leqslant f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в промежутке $[0; 1]$.

3. В сейфе n ячеек с номерами от 1 до n. В каждой ячейке первоначально лежала карточка с её номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в i-й ячейке оказалась карточка с числом a_i. Петя может менять местами любые две карточки с номерами x и y, платя за это $2|x-y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_n - n|$ рублей.

4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

Второй день

5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ, пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP, пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.

7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

8. На плоскости дано n выпуклых попарно пересекающихся k-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих k-угольников.