Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2013/14 год

Первый день

1. Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них — 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

2. Стозначное число n назовём *необычным*, если десятичная запись числа n^3 заканчивается на n, а десятичная запись числа n^2 не заканчивается на n. Докажите, что существует не менее двух стозначных необычных чисел.

3. В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

4. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC — точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен $60°$. Докажите, что $\dfrac{A_1A_2}{BC} = \dfrac{B_1B_2}{CA} = \dfrac{C_1C_2}{AB}$.

Второй день

5. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

7. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.