Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, финал, 2012/13 год

Первый день

1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений

$$(x-a)(x-b)=x-c, \quad (x-b)(x-c)=x-a, \quad (x-c)(x-a)=x-b$$

имеют решение.

2. На окружности отметили n точек, разбивающие её на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n *новых точек*, разбивающих окружность на n *новых дуг*. Докажите, что найдётся новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)

3. Найдите все такие натуральные k, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

$\boxed{k=1}$

4. Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены такие точки P и Q, что

$$\angle PDC+\angle PCB=\angle PAB+\angle PBC=\angle QCD+\angle QDA=\angle QBA+\angle QAD=90^\circ.$$

Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

Второй день

5. Существует ли такое натуральное n, что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, $\ldots$, y.)

Нет

6. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

50

7. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 — в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

8. На плоскости нарисован квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нём проведены несколько отрезков, параллельных сторонам, причём никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Оказалось, что отрезки разбили квадрат на прямоугольники, причём каждая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а каждая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения — ровно l прямоугольников. Каким могло оказаться количество прямоугольников разбиения?

kl