Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2023 год

1. Каждое натуральное число покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный, причём все 3 цвета встречаются. Может ли оказаться так, что сумма любых двух чисел разных цветов является числом оставшегося цвета?

2. Различные действительные числа x, y, z таковы, что среди трёх чисел

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad \frac{y+z}{y^2+yz+z^2}, \quad \frac{z+x}{z^2+zx+x^2}$$

какие-то два равны. Верно ли, что все эти три числа равны?

3. Натуральные числа a, b, c таковы, что $1 \leqslant a < b < c \leqslant 3000$. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$\text{НОД}(a,b) + \text{НОД}(b,c) + \text{НОД}(c,a).$$

4. В окружность ω вписан треугольник ABC такой, что $AB < BC$. Биссектриса внешнего угла B пересекает ω в точке M. Прямая, параллельная MB, пересекает стороны BC, AB и продолжение стороны AC за точку A в точках P, Q и R соответственно. Прямая MR вторично пересекает ω в точке X. Докажите, что точки B, P, Q, X лежат на одной окружности.

5. Дана клетчатая доска 100×100. Каждая клетка доски покрашена в один из двух цветов: белый или чёрный. Назовём раскраску доски **уравновешенной**, если в каждой строке и в каждом столбце 50 белых и 50 чёрных клеток. За одну операцию разрешается выбрать две строки и два столбца так, чтобы из 4 клеток на их пересечении две были чёрными, а две — белыми, и перекрасить каждую из этих 4 клеток в противоположный цвет. Докажите, что из любой уравновешенной раскраски можно получить любую другую уравновешенную раскраску с помощью указанных операций.

6. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами таковы, что в совокупности они имеют 4 различных действительных корня, а также каждый из многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ имеет 4 различных действительных корня. Какое наименьшее количество различных действительных чисел может быть среди корней многочленов $P(x), Q(x)$, $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$?