Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2023 год

1. Существуют ли многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что многочлены $P(x) \cdot Q(x)$, $Q(x) \cdot R(x)$ и $P(x) \cdot R(x)$ имеют одинаковую степень, а многочлены $P(x) + Q(x)$, $P(x) + R(x)$ и $Q(x) + R(x)$ имеют попарно различные степени? (Считаем, что нулевой многочлен степени не имеет, то есть указанные многочлены не могут быть ему равны.)

2. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$. На стороне CD нашлась точка N такая, что $\angle DNB = 90°$. Докажите, что $AD + NC = DN$.

3. Для действительных чисел $x > 2$ и $y > 2$ докажите, что

$$\frac{x^2 - x}{y^2 + y} + \frac{y^2 - y}{x^2 + x} > \frac{2}{3}.$$

4. Однажды 45 друзей, живущих в разных уголках земного шара, захотели обменяться друг с другом новостями. Для этого они собираются устроить k видеовстреч, на каждой из которых каждый человек расскажет всем свои новости, а также все новости других людей, которые он узнал ранее.

Для видеовстреч было предложено 10 дней, но оказалось, что каждый из друзей может присутствовать только в какие-то 8 из них. При каком наименьшем натуральном k можно гарантированно выбрать k дней для видеовстреч из предложенных 10 так, чтобы каждый узнал новости каждого?

(Между предложенными днями у людей новых новостей не возникает, и никак иначе они друг с другом не общаются. В каждый из предложенных дней проходит одна видеовстреча, на которой собираются все, кто может в этот день присутствовать.)

5. Найдите все составные натуральные числа n, обладающие следующим свойством: каждый натуральный делитель числа n (в частности, само n), уменьшенный на 1, является квадратом целого числа.

6. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AH^2 = BH^2 + CH^2$. На описанной окружности треугольника ABC нашлись точки D и E такие, что $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. Докажите, что точка H лежит на прямой DE.