

Олимпиада «Высшая проба» по математике

8 класс, 2022 год

1. Число $a*b$ есть произведение b последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно a (в частности, $a * 1 = a$). Найдите все пары натуральных чисел a, b , для которых выполнено равенство $a * b = 2(b * a)$.
2. В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка K такая, что $AB = BK = KC$. Докажите, что центр параллелограмма равноудален от середин всех сторон треугольника AKD .
3. Настойчивый восьмиклассник Вася выписал в ряд 2021 нечётное число $n_1, n_2, \dots, n_{2021}$. Затем он построил новый ряд из 2020 чисел по следующему правилу: p_1 получается перемножением всех делителей числа n_1 (в том числе единицы и самого числа) и всех делителей числа n_2 , p_2 получается перемножением всех делителей числа n_2 и всех делителей числа n_3 и т. д. Вася утверждает, что $n_1 = 3$, $n_{2021} = 13$, а у произведения $p_1 p_2 \dots p_{2020}$ последние четыре цифры — 2021. Стоит ли верить Васе?
4. Назовём ход ладьи банальным, если она смещается на кратное трём число клеток. В противном случае назовём ход оригинальным. Может ли ладья обойти поле 9×9 , чередуя банальные и оригинальные ходы так, чтобы в каждой клетке ладья побывала ровно один раз?
5. Имеется 111 палочек длин $1, 2, 3, \dots, 111$. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?
6. Натуральное число N называется интересным, если в системе счисления с основанием t оно задаётся четырёхзначным числом \overline{abcd} (то есть, $N = at^3 + bt^2 + ct + d$, $0 \leq a, b, c, d \leq t - 1$, $a \neq 0$) таким, что $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом? Ответ, конечно, должен зависеть от числа t .