

Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2022 год

1. В этой задаче запись $x \bmod n$, где x — целое, а n — натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n - 1$, что $x - y$ делится на n . Существует ли такая функция f , определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f((x^2 + 1) \bmod 7) = (f(x)^2 + 1) \bmod 11?$$

2. Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\frac{\pi}{10}$ вшэкоина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число p , причем $1 < p < 2$. Если цвет вытащенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег — игрок получит назад px денег, если не совпадает — не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 2 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC касается вписанной и соответствующей внеписанной окружностей в точках T_1, T_2 соответственно. Окружность, проходящая через середины сторон, касается этих же окружностей в точках S_1, S_2 соответственно. Докажите, что $\angle S_1CT_1 = \angle S_2CT_2$.

4. Найдите все действительные числа d , для которых существуют многочлены от одной переменной P и Q , такие что равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

выполняется при всех значениях x кроме конечного числа.

5. Через $X(\alpha)$ будем обозначать точку с координатами $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ (все такие лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Выбрали произвольный угол φ и провели хорды $P(\varphi)P(2022\varphi), P(2022\varphi)P(2022^2\varphi), \dots$ (на n -м шаге проводится хорда $P(2022^{n-1}\varphi)P(2022^n\varphi)$). Если хорда уже была проведена — она не проводится второй раз. Оказалось, что все проведённые хорды не пересекаются иначе чем по концам. Докажите, что всего проведено конечное число хорд.

6. Фокусник и его Ассистент готовятся показать следующий фокус. Фокуснику завяжут глаза, после чего один из зрителей напишет на доске 60-битное слово (последовательность из 60 нулей и единиц). Ассистент уверен, что сможет незаметно сообщить фокуснику 44 бита (не обязательно написанные в слове, можно вычислять любые функции). После чего Фокусник должен будет назвать слово. Для какого наибольшего числа C Фокусник и Ассистент могут придумать стратегию, позволяющую всегда назвать слово, совпавшее хотя бы в C битах с написанным зрителем.